V. FUNKCE

PŘÍKLAD 24

Rozhodněte, která z tabulek určuje funkci:

a)

x	-5	-4	-2	0	-2	-4	-6	1	2	5
f(x)	-1	3	1	0	2	-3	1	3	7	-9

b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	1	0	2	4	1	4	2	0	1

Řešení

a) Tabulka neurčuje funkci, neboť např. prvku -4 z množiny vzorů $\{-5; -4; -2; 0; -6; 1; 2; 5\}$ přiřazuje tato tabulka dvě různá reálná čísla: 3 a -3. Také prvku -2 jako vzoru jsou přiřazeny dva různé obrazy: 1 a 2.

b) Tabulka určuje funkci, protože každému prvku definičního oboru $\{-4; 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ je přiřazeno právě jedno reálné číslo (např. k číslu -1 číslo 4, k číslu 3 jen číslo 0 atd.).

Úlohy

282 Rozhodněte, kterou z tabulek je určena funkce (v záporném případě uveďte, proč nejde o funkci):

a)

x	△	○	□	×	⊕	⊖
f(x)	0	1	2	3	4	5

b)

x	a	e	d	c	f	h	g
f(x)	-1	2	-1	2	-1	2	-1

c)

x	1	2	3	2	1	0	-1
f(x)	0	1	2	3	4	5	6

[a) ano; b) ano; c) ne, protože číslu x = 1 jsou přiřazeny dva různé obrazy 0 a 4]

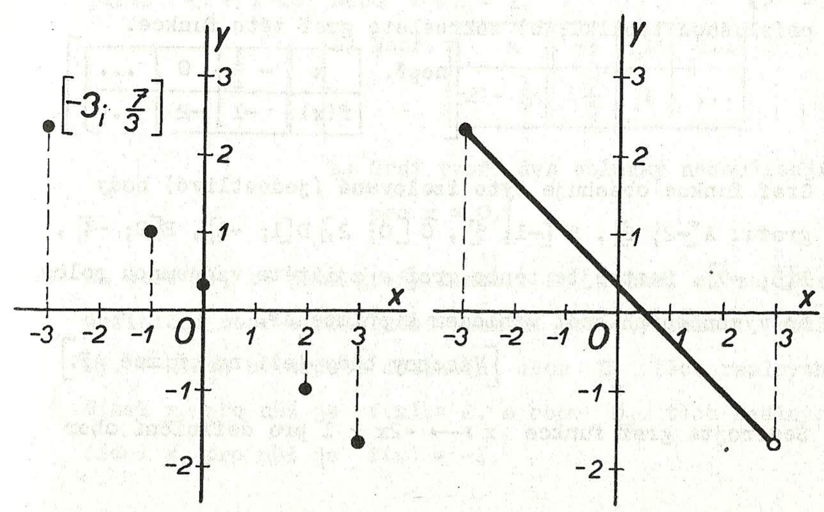
PŘÍKLAD 25

Je dána funkce $x \mapsto -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, jejíž definiční obor je a) $D = \{-3; -1; 0; 2; 3\}$, b) D tvoří všechna reálná čísla x, pro něž platí $-3 \leqq x < 3$. V obou případech sestrojte graf funkce.

Řešení

a) Pro každé $x \in D$ vypočítáme funkční hodnotu; např. pro $x = -3$ je to: $-\frac{2}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Uspořádaná dvojice $[x, f(x)]$, tj. v našem případě $\left[-3; \frac{7}{3}\right]$, určuje jeden bod grafu v soustavě souřadnic s kolmými osami x, y. Další body grafu jsou $[-1; 1]$, $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, $[2; -1]$, $\left[3; -\frac{5}{3}\right]$.

a) b)



b) Graf bude obsahovat body jako v případě a) až na bod $\left[3; -\frac{5}{3}\right]$, protože číslo 3 do definičního oboru nepatří. Výpočtem funkčních hodnot pro další x z definičního oboru získáme y-ové souřadnice dalších bodů grafu. Např. pro x = -2 je $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$; dostaneme tak uspořádanou dvojici $\left[-2; \frac{5}{3}\right]$. Další bod grafu určí $\left[1; -\frac{1}{3}\right]$ atd. Protože definiční obor tvoří všechna reálná čísla x, pro která platí $-3 \leq x < 3$, vyplní body grafu úsečku (až na krajní bod $\left[3; -\frac{5}{3}\right]$).

Úlohy

283 Pro prvky definičního oboru $D = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ vypočtěte funkční hodnoty funkce $x \longmapsto -x + 1$. a) Sestavte příslušnou tabulku; b) zakreslete graf této funkce.

[např.

x	-1	0	...
f(x)	2	1	...

]

284 Definiční obor funkce $x \longmapsto -2x - 2$ je $D = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$. Určete odpovídající funkční hodnoty: a) sestavte příslušnou tabulku; b) zakreslete graf této funkce.

[např.

x	$-\frac{1}{2}$	0	...
f(x)	-1	-2	...

]

285 Graf funkce obsahuje tyto izolované (jednotlivé) body grafu: $A[-2; 8]$, $B[-1; 5]$, $C[0; 2]$, $D[1; -1]$, $E[2; -4]$, $F[3; -7]$. Sestrojte tento graf a zjistěte vzájemnou polohu vyznačených bodů vzhledem k přímce AF.

[Všechny body leží na přímce AF.]

286 Sestrojte graf funkce $x \longmapsto -2x + 1$ pro definiční obor

a) $D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$; b) tvořený všemi čísly x, pro něž platí $-3 \leq x \leq 2$.

[a) Např.

x	-3	1	...
-2x+1	7	-1	...

graf tvoří izolované body,

b) graf tvoří úsečka MN s krajními body $M[-3; 7]$ a $N[2; -3]$.]

287 Sestrojte graf funkce $x \longmapsto -\frac{2}{x} + 1$ a) pro definiční obor $D = \left\{-2,5; -2; -1,5; -1; 1; \frac{1}{2}; 2\right\}$; b) tvořený reálnými čísly x, pro něž platí $-4 < x < 0$ nebo $0 < x < 4$.

[a) Např.

x	-2	$\frac{1}{2}$	...
$-\frac{2}{x}+1$	2	-3	...

b) Graf tvoří dva oblouky nesouvisející pro x = 0.]

288 Určete obor funkčních hodnot funkce $x \longmapsto 2 - \frac{1}{x}$ a) pro x z definičního oboru $D = \left\{-3; -2,5; -1,5; -1; 1; \frac{1}{2}; 2\right\}$. b) Sestrojte graf této funkce pro reálná čísla x, pro něž platí $-3 \leq x < 0$ nebo $0 < x \leq 2$.

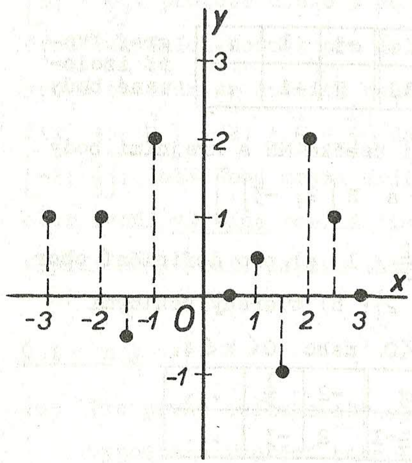
[a) Např.

x	-3	1	...
$2 - \frac{1}{x}$	$\frac{7}{3}$	1	...

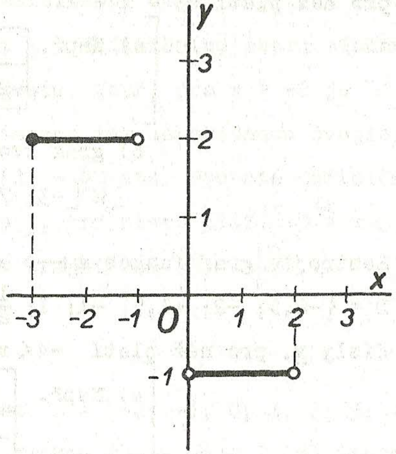
b) Graf tvoří dva oblouky nesouvisející pro x = 0.]

289 Na obr. a), b) jsou grafy funkcí. Pro funkci a) zapište definiční obor a příslušné funkční hodnoty pomocí tabulky. V úloze b) určete definiční obor D_1 těch reálných čísel x, pro něž je $f(x) = 2$, a obor D_2 těch reálných čísel x, pro něž je $f(x) = -1$.

a)



b)



Např. a)

x	-3	$-1{,}5$	$0{,}5$	...
$f(x)$	1	$-0{,}5$	0	...

b) D_1: $-3 \leqq x < -1$, D_2: $0 < x < 2$

290 Sestrojte graf funkce $x \longmapsto x^2 - 3$ pro definiční obor a) $D = \{-3; -2{,}5; -1; 0; 1; 1{,}5; 2\}$, b) $D = R$ (množina reálných čísel).

Např. a)

x	-3	$1{,}5$	...
x^2-3	6	$-0{,}75$	...

b) Parabola s vrcholem $[0; -3]$.

291 Sestrojte pro definiční obor $D = R$ grafy funkcí a) $x \longmapsto -x$; b) $x \longmapsto -x - 2$; c) $x \longmapsto -x + 2$.

Grafy funkcí jsou rovnoběžné přímky procházející body a) $[0; 0]$; b) $[0; -2]$; c) $[0; 2]$.

292 Sestrojte grafy funkcí s definičním oborem $D = R$: a) $x \longmapsto \frac{x}{2} + 1$; b) $x \longmapsto -\frac{3}{2}x + 2$; c) $x \longmapsto \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

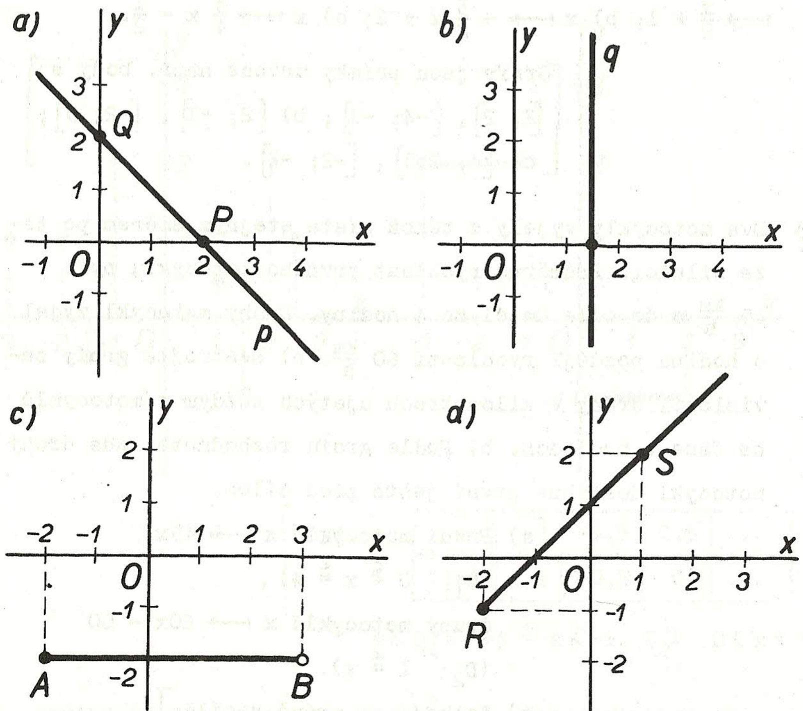
Grafy jsou přímky určené např. body a) $[2, 2]$, $[-4; -1]$; b) $[2; -1]$, $[-2; 5]$; c) $[4; 2{,}5]$, $[-2; -2]$.

293 Dva motocykly vyjely z téhož místa stejným směrem po téže silnici. Průměrná rychlost prvního motocyklu byla $45\ \frac{km}{h}$ a do cíle dojel za 4 hodiny. Druhý motocykl vyjel o hodinu později rychlostí $60\ \frac{km}{h}$. a) Sestrojte grafy závislosti dráhy v kilometrech ujetých každým z motocyklů na čase v hodinách. b) Podle grafu rozhodněte, zda druhý motocykl dostihne první ještě před cílem.

a) První motocykl: $x \longmapsto 45x$
(D_1: $0 \leqq x \leqq 4$),
druhý motocykl: $x \longmapsto 60x - 60$
(D_2: $1 \leqq x$).
b) Setkají se právě v cíli.

P Ř Í K L A D 26

Rozhodněte, na kterém z obrázků a), b), c), d) je znázorněn graf funkce. Pak určete příslušné definiční obory a zápisy těchto funkcí.



Řešení

a) Přímka p je grafem lineární funkce, jejíž zápis má tvar $x \longmapsto ax + b$. Body o souřadnicích $[0;\ 2]$ a $[2;\ 0]$ leží v této přímce, a proto platí $Q\ [0;\ 2]:\ 0 \longmapsto a.0 + b = 2$, tj. $b = 2$; $P\ [2;\ 0]:\ 2 \longmapsto a.2 + b = 0$, tj. $2a + 2 = 0$ čili $a = -1$. Proto zápis funkce má tvar $x \longmapsto -x + 2$, její definiční obor $D = R$, tj. množina všech reálných čísel; grafem je celá přímka p.

b) Přímka q není grafem funkce, neboť jedinému prvku definičního oboru $x = 1{,}5$ nepřiřazuje jako funkční hodnotu jediné číslo, nýbrž souřadnici y libovolného bodu přímky q.

c) Úsečka AB (bez krajního bodu B) je grafem konstantní funkce. Její definiční obor tvoří čísla x, pro něž platí $-2 \leqq x < 3$, zápis pak $x \longmapsto -2$.

d) Graf funkce tvoří polopřímka RS. Do jejího definičního oboru patří všechna x, pro něž platí $-2 \leqq x$. Čísla a, b zápisu funkce $x \longmapsto ax + b$ vypočítáme pomocí souřadnic bodů R a S.

$R[-2,\ -1]:\ -2 \longmapsto a.(-2) + b = -1$ tedy $a.(-2) + b = -1$

$S\ [1,\ 2]:\ 1 \longmapsto a\ .\ 1 + b = 2$ tedy $a\ .\ 1 + b = 2$

Řešením soustavy těchto dvou rovnic pro neznámé a, b dostaneme $a = 1$, $b = 1$. Zápis funkce je tedy $x \longmapsto x + 1$.

Úlohy

294 Graf funkce obsahuje body $P\left[-2;\ -\frac{5}{2}\right]$, $Q\left[-1;\ -\frac{3}{2}\right]$, $R\left[0;\ -\frac{1}{2}\right]$, $S\left[1;\ \frac{1}{2}\right]$, $T\left[2;\ \frac{3}{2}\right]$, $U\left[3;\ \frac{5}{2}\right]$. a) Sestrojte graf této funkce a na základě toho vyslovte domněnku, o jakou funkci jde. b) Pro definiční obor D = R stanovte zápis této funkce.

[a) Izolované body ležící v přímce. b) Zápis funkce je $x \longmapsto x - \frac{1}{2}$.]

295 Určete čísla a, b v zápisu funkce $x \longmapsto ax + b$ s definičním oborem D = R, jejíž graf obsahuje body a) $A\ [1;\ 2]$, $B\ [4;\ -1]$; b) $C\ [3;\ 2]$, $D\ [-2;\ -8]$.

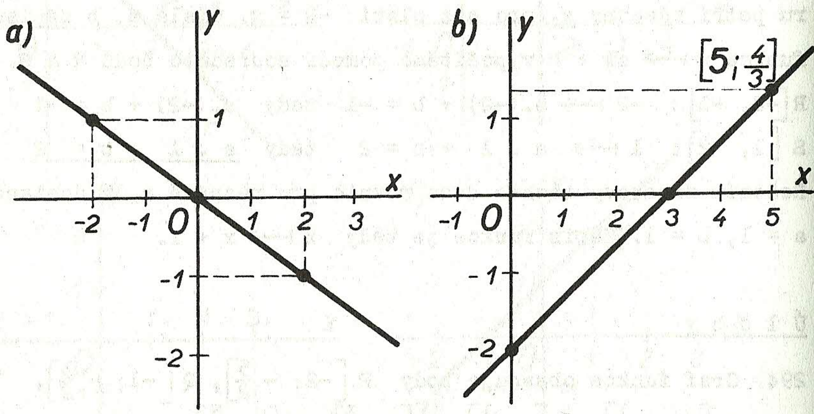
[a) $x \longmapsto -x + 3$; b) $x \longmapsto 2x - 4$]

296 Graf lineární funkce $x \longmapsto ax + b$ s definičním oborem D = R obsahuje body a) $M\ [-2;\ 0]$, $N\ [3;\ -2]$; b) $P\ [-1;\ 2]$,

Q $[4;\ 2]$. Určete v obou případech čísla a, b v zápisu funkce.

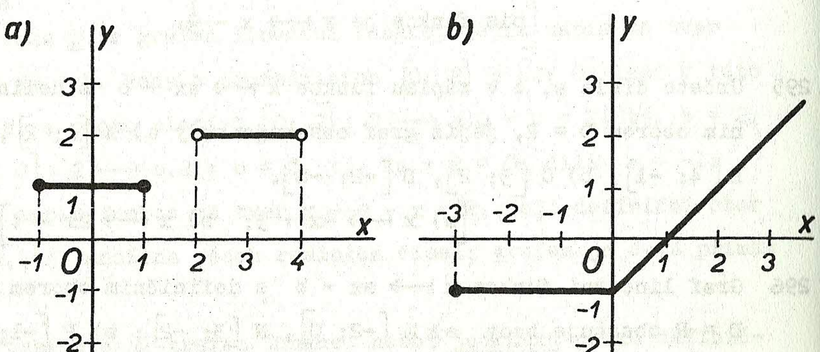
$\left[\text{a) } x \longmapsto -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5};\ \text{b) } x \longmapsto 2\right]$

297 Na obrázku a) a b) jsou grafy funkcí s definičním oborem D = R. Stanovte zápisy těchto funkcí.



$\left[\text{a) } x \longmapsto -\frac{1}{2}x;\ \ x \longmapsto \frac{2}{3}x - 2\right]$

298 Na obrázcích a), b) jsou grafy funkcí. Určete jejich definiční obory a zápisy.



$\Big[$a) Pro $-1 \leqq x \leqq 1$ je zápis funkce $x \longmapsto 1$, pro $2 < x < 4$ je $x \longmapsto 2$. b) Pro $-3 \leqq x \leqq 0$ je zápis funkce $x \longmapsto -1$, pro $0 \leqq x$ je $x \longmapsto x - 1$.$\Big]$

P Ř Í K L A D **27**

Zjistěte, která z funkcí a) $x \longmapsto \frac{2}{3}x - 2$; b) $x \longmapsto -6x + 8$; c) $x \longmapsto -3$ je klesající a která rostoucí.

Řešení

Podle definice rostoucí funkce (pro každá dvě různá čísla $x_1 < x_2$ definičního oboru je $f(x_1) < f(x_2)$) a klesající funkce (pro každá dvě různá $x_1 < x_2$ z D je $f(x_1) > f(x_2)$) zjistíme, o jaký druh funkce jde.

a) Protože jde o funkci lineární, je jejím definičním oborem D množina všech reálných čísel R a grafem přímka. Stačí tedy vyšetřovat souřadnice jen dvou různých bodů grafu $[x;\ f(x)]$. Zvolíme např. $x_1 = -3$, $x_2 = 6$ a dostaneme tabulku:

x	-3	6
$\frac{2}{3}x - 2$	-4	2

Pro $-3 < 6$ je $f(-3) = -4$, $f(6) = 2$; $f(-3) < f(6)$; jde tedy o funkci rostoucí.

Poznámka: Funkce $x \longmapsto ax + b$ je pro $a > 0$, tj. v našem případě pro $a = \frac{2}{3} > 0$, vždy rostoucí.

b) Zvolíme $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Pak platí tabulka:

x	0	3
$-6x + 8$	8	-10

Pro $0 < 3$ je $f(0) = 8$, $f(3) = -10$; $f(0) > f(3)$; jde tedy o funkci klesající.

<u>Poznámka:</u> Funkce $x \longmapsto ax + b$ je pro $a < 0$, tj. v našem případě pro $a = -6 < 0$, <u>vždy</u> klesající.

c) Pro libovolná dvě různá x_1, x_2 je $f(x_1) = f(x_2) = -3$, což je konstanta; v tomto případě jde o funkci nazývanou <u>konstantní</u> (stálá), která není ani rostoucí, ani klesající.

<u>Ú l o h y</u>

299 Rozhodněte, která z lineárních funkcí a) $x \longmapsto -3x - 2$; b) $x \longmapsto 5$; c) $x \longmapsto \frac{4}{3}x - 1$ je rostoucí nebo klesající nebo konstantní nejprve početně a pak si výsledek ověřte na grafu.

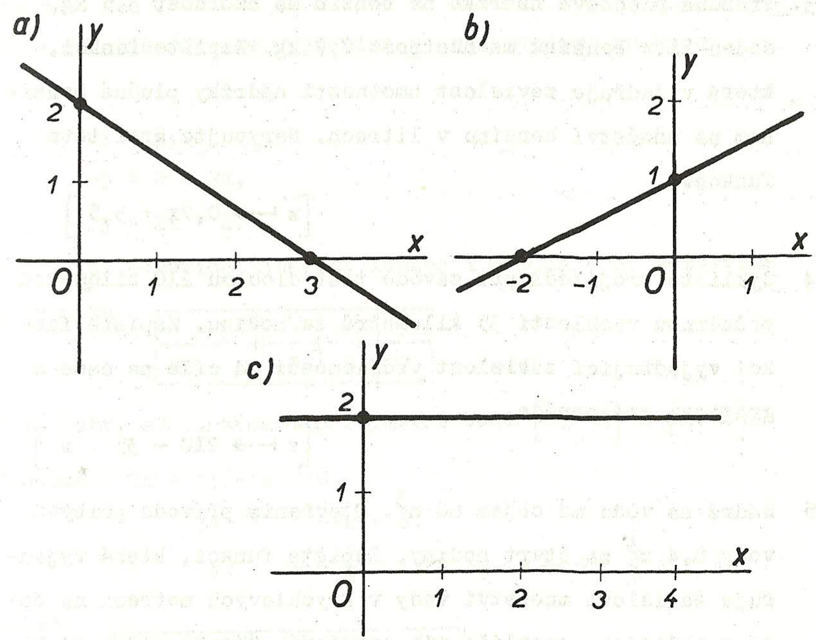
[a) funkce klesající; b) konstantní; c) rostoucí]

300 Dvě funkce jsou určeny zápisy $x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 1$ a $x \longmapsto -\frac{1}{2}x - 1$.

a) Zjistěte, o který druh funkcí jde (rostoucí nebo klesající). b) Sestrojte jejich grafy a popište vzájemnou polohu.

[a) Obě funkce jsou klesající; b) grafy jsou rovnoběžné přímky.]

301 Na obrázcích a), b), c) jsou grafy funkcí. Určete jejich zápisy. Zjistěte, zda jde o funkce rostoucí nebo klesající.



[a) $x \longmapsto -\frac{2}{3}x + 2$, funkce klesající
b) $x \longmapsto \frac{1}{2}x + 1$, funkce rostoucí
c) $x \longmapsto 2$, funkce konstantní]

302 Rychlík jede průměrnou rychlostí 72 km za hodinu z místa A do místa B.

a) Sestrojte graf závislosti ujeté dráhy na čase a sestavte zápis této závislosti. Dále určete, o jaký druh funkce jde. b) Jaká je vzdálenost míst A, B, jestliže do místa B dojel rychlík za 1 hodinu 25 minut? (Volte jednotky na osách: 1 hodina odpovídá 6 cm, 2 km odpovídají 1 mm.)

[a) $x \longmapsto 72x$, funkce rostoucí; b) 102 km]

303 Prázdná plechová nádržka na benzín má hmotnost 3,5 kg. Jeden litr benzínu má hmotnost 0,7 kg. Zapište funkci, která vyjadřuje závislost hmotnosti nádržky plněné benzínem na množství benzínu v litrech. Narýsujte graf této funkce.

$[x \longmapsto 0{,}7x + 3{,}5]$

304 Cyklista projížděl při závodě trať dlouhou 210 kilometrů průměrnou rychlostí 35 kilometrů za hodinu. Zapište funkci vyjadřující závislost vzdálenosti od cíle na čase a graficky znázorněte.

$[x \longmapsto 210 - 35 \, . \, x]$

305 Nádrž na vodu má objem 80 m^3. Otevřením přívodu přibývá vody 0,4 m^3 za čtvrt hodiny. Zapište funkci, která vyjadřuje závislost množství vody v krychlových metrech na čase v hodinách, jestliže při otevření přítoku nádrž a) byla prázdná, b) byla již naplněna 300 hektolitry vody.

[a) $x \longmapsto 1{,}6x$; b) $x \longmapsto 1{,}6\,x + 30$]

306 Letadlo startovalo se zásobou 2 000 litrů benzínu. Na 100 kilometrů letu spotřebovalo osminu tohoto množství. Zapište funkci, která vyjadřuje zásobu paliva v závislosti na uražené dráze, a graficky ji znázorněte. Jaká je nejdelší možná délka letu?

[$x \longmapsto 2\,000 - 2{,}5\,x$; 800 km]

P Ř Í K L A D 28

Řešte graficky soustavu rovnic:

$2x - y = 2$

$2x + 3y - 6 = 0$

Řešení

Nejprve z každé rovnice vyjádříme $\underline{y}$, tj. uvedeme na tvar $y = f(x)$:

a) $2x - y = 2,$

$-y = 2 - 2x,$

$y = 2x - 2.$

Této rovnici odpovídá lineární funkce $x \longmapsto 2x - 2$. Sestavíme její tabulku

x	0	1	2
2x − 2	−2	0	2

atd.

Graf g_1 (obr. a) určíme např. pomocí bodů $[0, -2]$ a $[1, 0]$.

b) Obdobně: $2x + 3y - 6 = 0,$

$3y = -2x + 6,$

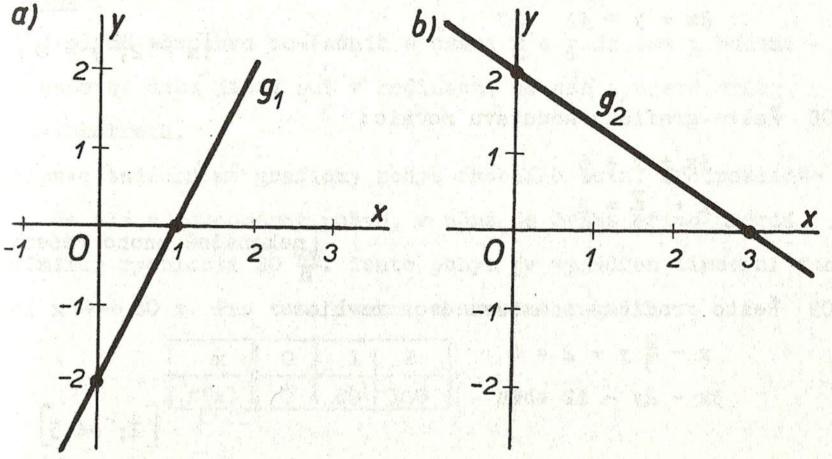
$y = -\frac{2}{3}x + 2$, tj. $x \longmapsto -\frac{2}{3}x + 2$

Tabulka:

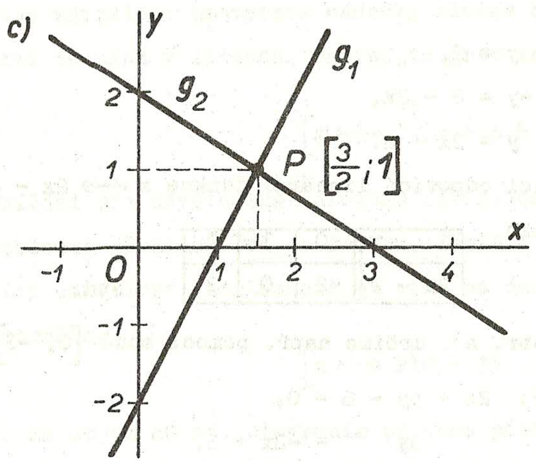
x	0	1	2	3
$-\frac{2}{3}x + 2$	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0

atd.

Graf g_2 (obr. b) určíme např. pomocí bodů $[0, 2]$ a $[3, 0]$.



Na obr. c) jsou narýsovány oba grafy g_1 a g_2. Souřadnice x, y jejich průsečíku jsou řešením dané soustavy rovnic.



Z obr. c) vyčteme $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$.

Ú l o h y

307 Řešte graficky soustavu rovnic:

$$x - y = 2$$
$$2x + y = 4$$

$[x = 2,\ y = 0]$

308 Řešte graficky soustavu rovnic:

$$3x + y = 6$$
$$x + \frac{y}{3} = 2$$

[nekonečně mnoho řešení]

309 Řešte graficky soustavu dvou rovnic:

$$x + \frac{2}{3}y + 2 = 0$$
$$3x - 2y - 12 = 0$$

$[1;\ -4{,}5]$

310 Řešte graficky soustavu dvou rovnic:

$$2x - 4y = 8$$
$$-x + 2y = 4$$

[nemá řešení]

311 Řešte graficky soustavu dvou rovnic:

$$x + 2y = 4$$
$$-4x + y = 8$$

$\left[-\frac{4}{3};\ \frac{8}{3}\right]$

P Ř Í K L A D **29**

Nákladní auto vyjelo po dálnici v 8 hodin ráno z města M směrem do města N. Jelo průměrnou rychlostí 50 kilometrů za hodinu. V 9 hodin 30 minut za ním vyjelo také z města M osobní auto průměrnou rychlostí 80 kilometrů za hodinu. a) Kdy a v jaké vzdálenosti od města M dostihne osobní auto nákladní auto? b) Zjistěte, zda to bude před nebo za městem N, které je od města M vzdáleno 150 kilometrů. Proveďte grafické řešení úlohy.

Řešení

a) Zvolíme soustavu souřadnic s osami x a y. Na ose x budeme vyznačovat dobu jízdy aut v hodinách, na ose y ujeté dráhy v kilometrech.

Nejprve znázorníme graficky pohyb osobního auta. Předpokládáme, že jde o rovnoměrný pohyb, v němž je dráha přímo úměrná průměrné rychlosti 80 $\frac{km}{h}$. Tento pohyb je vyjádřen lineární funkcí $x \longmapsto 80x$. Pro tuto funkci sestavíme tabulku:

x	0	1	2
f(x)	0	80	160

atd.

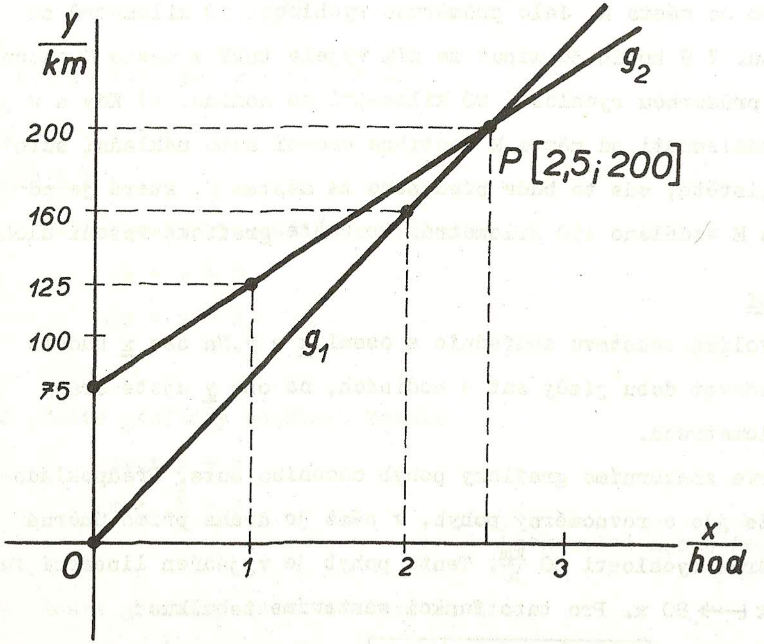
Z ní vybereme souřadnice dvou bodů, např. [0; 0] a [2; 160], pro sestrojení grafu g_1 (obr.).

Pohyb nákladního auta zaznamenáme až od doby výjezdu osobního auta, tj. od 9 hodin 30 minut. V tomto okamžiku má již nákladní auto ujeto 75 kilometrů (tj. 50 $\frac{km}{h}$. 1,5 h). Za další hodinu ujede nákladní auto opět 50 km, tj. urazí již 75 km + 50 km atd. Opět sestavíme tabulku

x	0	1	2
f(x)	75	75+50.1	75+50.2

atd.

Tato tabulka patří funkci $x \longmapsto 50x + 75$. Její graf g_2 sestrojíme např. pomocí bodů [0, 75] a [1, 125] (obr.).



Grafy g_1 a g_2 se protnou v bodě P, který má souřadnice [2,5; 200]. Tak získáme odpověď: a) Osobní auto dostihne nákladní

auto za 2,5 hodiny po svém odjezdu, tj. ve 12 hodin, a to ve vzdálenosti 200 kilometrů od města M. b) Ze souřadnice $y = 200$ bodu P je zřejmé, že místo setkání je až za městem N vzdáleným jen 150 kilometrů od města M.

Ú l o h y

312 a) Při větším odběru zemního plynu platí spotřebitel měsíční paušál 37,50 Kčs a jen 70 haléřů za 1 m^3 spotřebovaného plynu. Zapište lineární funkci, která vyjadřuje závislost celkové platby v závislosti na spotřebě, a graficky ji znázorněte.

a) Zapište funkci a graficky ji znázorněte i v případě, že cena za 1 m^3 je 1,05 Kčs a platí se měsíční nájemné za plynoměr 7,50 Kčs.

c) Udejte počet m^3 spotřebovaného plynu, pro který je sazba a) výhodnější.

[a) $x \longmapsto 0{,}70x + 37{,}50$; b) $x \longmapsto 1{,}05x + 7{,}50$; c) pro více než 86 m^3]