Opakování ZŠ - Matematika - část geometrie - konstrukce

Základní útvary v rovině

Bod

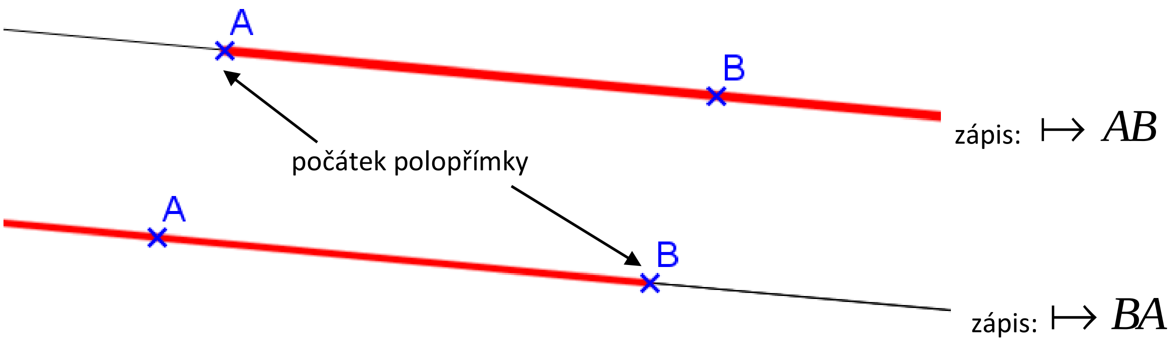
je nejzákladnější geometrický pojem. Body zapisujeme písmeny velké abecedy: A, B, N, H, …

Přímka

Přímky zapisujeme písmeny malé abecedy: p, k, s, m, …

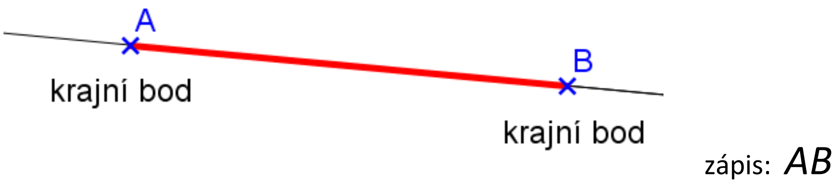
Polopřímka

Bod ležící na přímce dělí přímku na dvě části, navzájem opačné polopřímky. Ty se zadávají také pomocí dvou bodů, záleží na jejich pořadí. První z nich je krajní bod, tzv. **počátek**. Polopřímku s počátkem A a **vnitřním bod**em B značíme ↦AB.



Úsečka

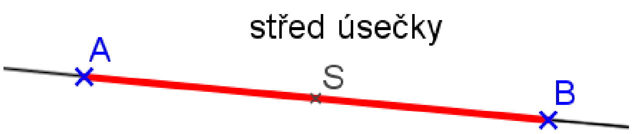
Úsečku AB lze definovat jako průnik dvou polopřímek ↦AB ∩ ↦BA



Velikost úsečky např.: $|AB| = 5cm$

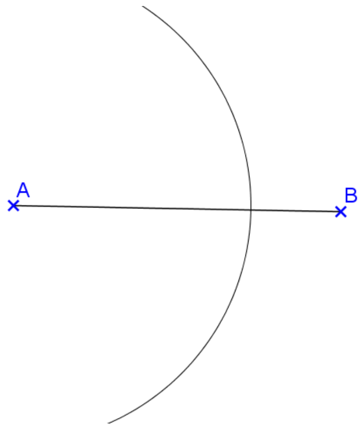
Střed úsečky

Body, které náleží úsečce a nejsou krajními, nazýváme vnitřní body úsečky. Ten z nich, který má od obou krajních bodů stejnou vzdálenost, je střed úsečky. Značíme S nebo s indexem např. S_{AB}.

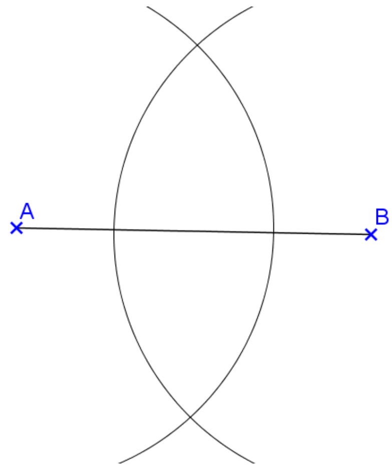


Nalezení středu úsečky pomocí kružítka a pravítka:

Do kružítka vezmeme více než polovinu délky úsečka a okolo bodu A opíšeme kružnici (stačí část – oblouk).

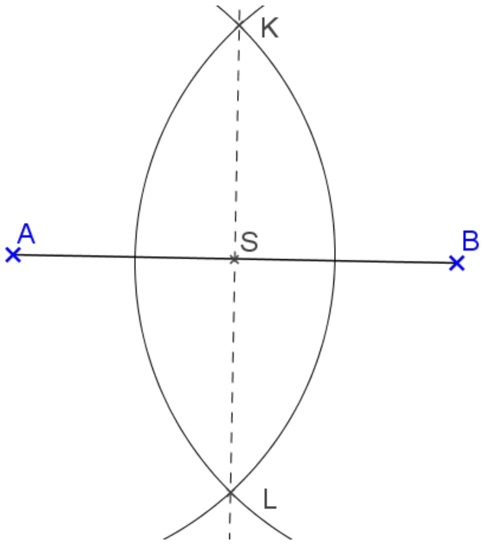


Se stejným poloměrem opíšeme stejnou kružnici okolo bodu B.



Obě kružnice se protnou ve dvou bodech, které označíme K, L a spojíme přímkou (osa úsečky).

Průsečík této přímky a úsečky AB je hledaný střed S.



Úkol:

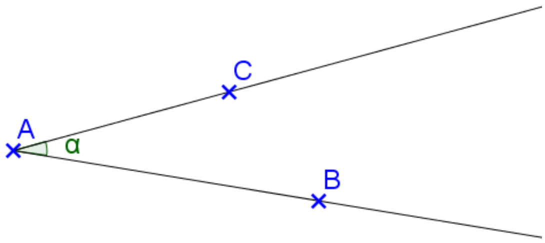
Je dána úsečka AB, sestrojte její střed

Úkol:

Je dána trojice bodů A, B, C, vyznačte modře $\longmapsto AB$, červeně $\longmapsto AC$, zeleně $\longmapsto CB$.

Úhel

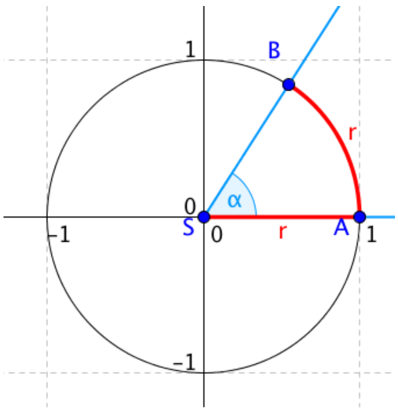
Úhel je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami, které mají společný počátek.



Velikost úhlu - měří se:

v stupňové míře - stupeň se dále dělí na minuty (značí se ′) a vteřiny (značí se ″). Jeden stupeň má 60 minut a jedna minuta má šedesát vteřin: 1°= 60', 1′ = 60″.

v obloukové míře – jednotkou je radián, jeho velikost odpovídá středovému úhlu oblouku, jehož délka je rovna poloměru daného oblouku.



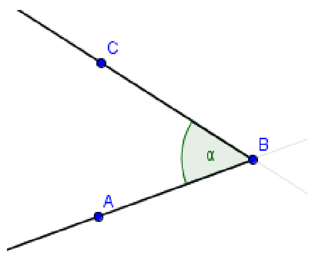
Jeden radián

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \mathrm{rad}$$

Významné úhly:

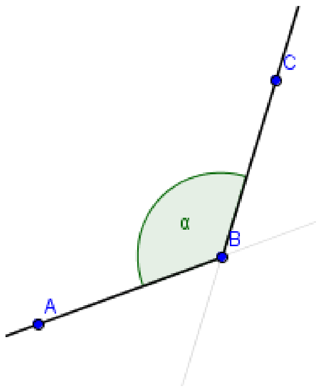
	stupně	radiány
Pravý úhel	90°	$\frac{\pi}{2}$
Přímý úhel	180°	π
Plný úhel	360°	2 π

Ostrý úhel – jeho velikost je menší než 90°



Ostrý úhel

Tupý úhel – jeho velikost je větší než 90°

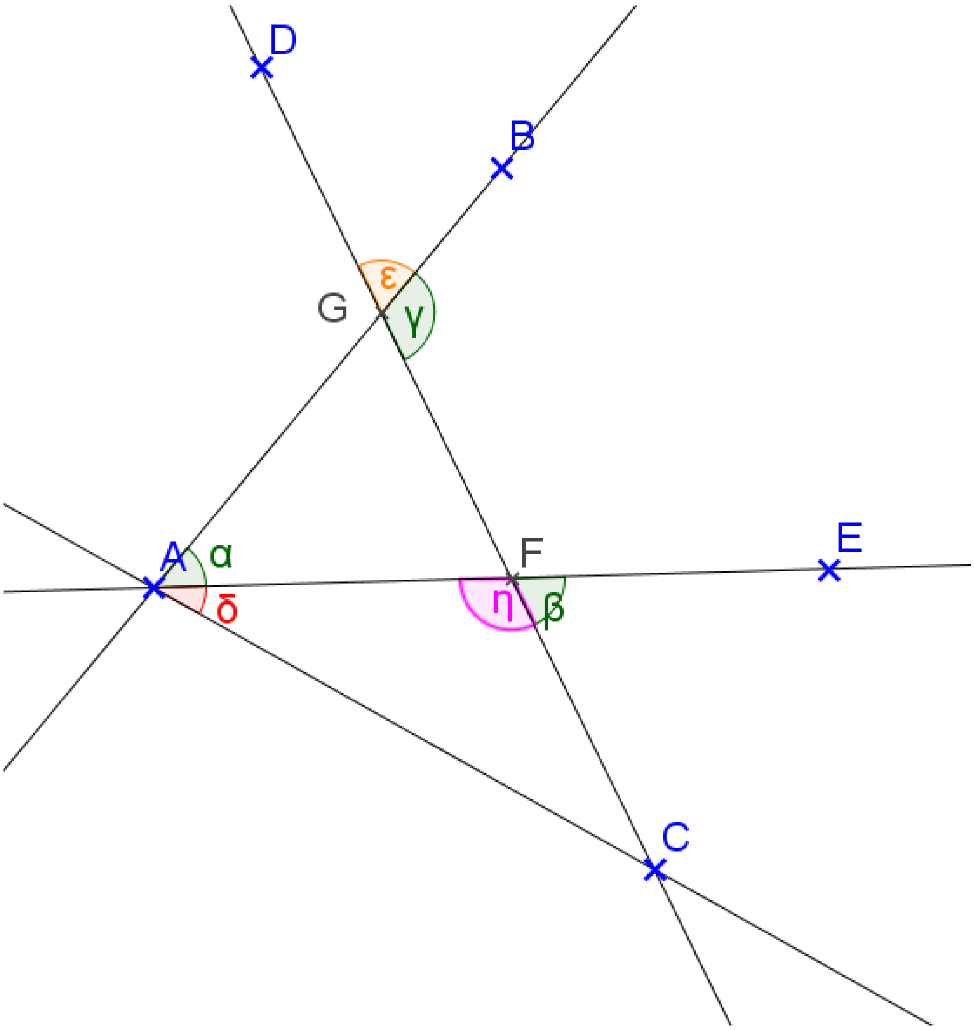


Tupý úhel

konvexní úhel (velikost méně než 180°), nekonvexní úhel (velikost více než 180°)

Úkol:

Ve stupňové míře změřte velikosti úhlů a zapište:



$\alpha =$

$\beta =$

$\chi =$

$\delta =$

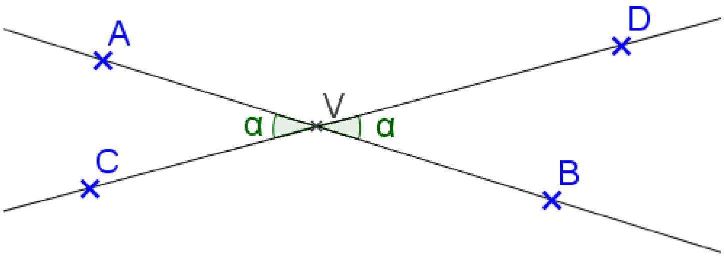
$\varepsilon =$

$\nu =$

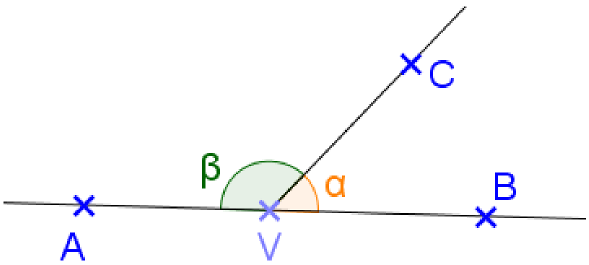
Bylo nutné, všechny úhly měřit? Dají se využít některé vlastnosti?

Dvojice úhlů

Vrcholové úhly jsou takové úhly, které mají společný vrchol a jejich ramena tvoří opačné polopřímky. Vrcholové úhly jsou vždy shodné, mají stejnou velikost.



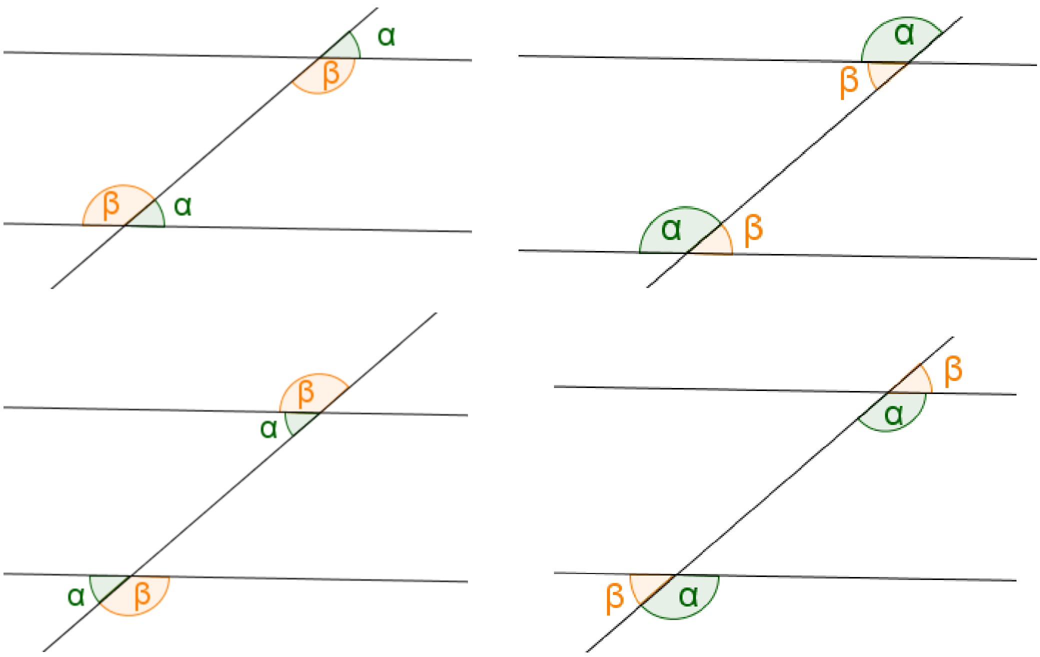
Vedlejší úhly jsou takové úhly, které mají jedno rameno společné a druhá ramena jsou opačné polopřímky. Součet vedlejších úhlů je vždy roven 180° (přímému úhlu).



Rovnoběžky proťaté příčkou tvoří další dvojice shodných úhlů:

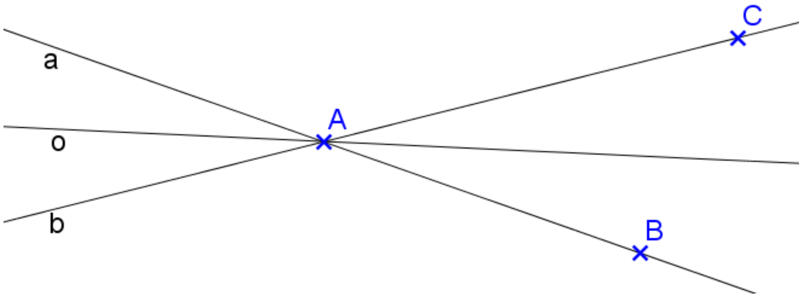
Souhlasné úhly - na obrázku označeny α.

Střídavé úhly - na obrázku označeny β.



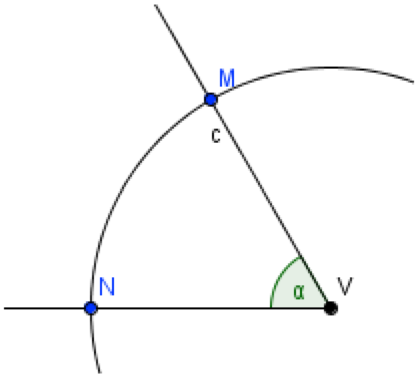
Osa úhlu

Je přímka, která prochází vrcholem úhlu a daný úhel půlí.

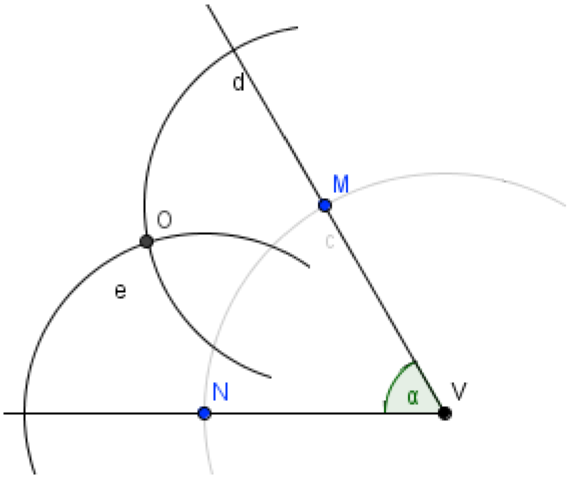


Jak sestrojit osu úhlu pomocí kružítka a pravítka:

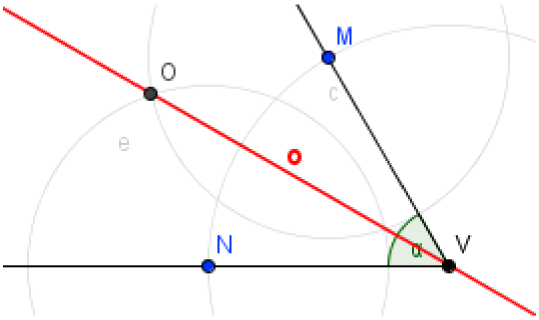
Nejprve narýsujeme libovolně velkou kružnici (stačí pouze její část – oblouk) se středem ve vrcholu úhlu, u kterého chceme osu udělat. Tato kružnice protne ramena úhlu vždy v jednom bodě, označme M a N.



Poté vezmeme do kružítka opět libovolnou vzdálenost (nejlépe stejnou) a uděláme stejně velké kružnice postupně se středem v M a poté se středem v N.

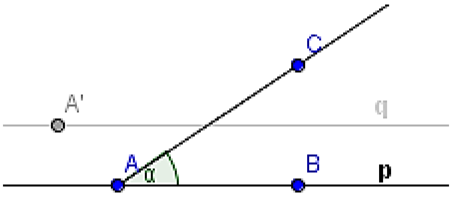


Tam, kde se kružnice protnou, se nachází jeden bod osy, bod označíme O. Druhý bod osy se nachází ve vrcholu úhlu. Spojíme O a V a získáme osu.

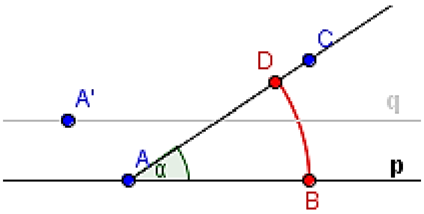


Jak přenést úhel kružítkem a pravítkem

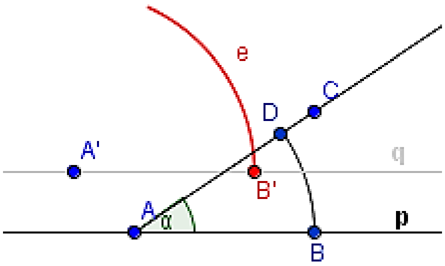
Začneme s tímto obrázkem:



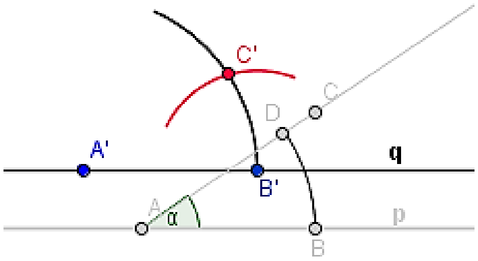
Úkolem je přenést úhel α výš tak, aby vrchol přeneseného úhlu α'odpovídal bodu A', aby měl stejnou orientaci a aby spodní rameno leželo na přímce q. Narýsujeme část kružnice mezi rameny úhlu α o libovolném poloměru se středem ve vrcholu úhlu, A. V kružítku si ponechejme poloměr této kružnice.



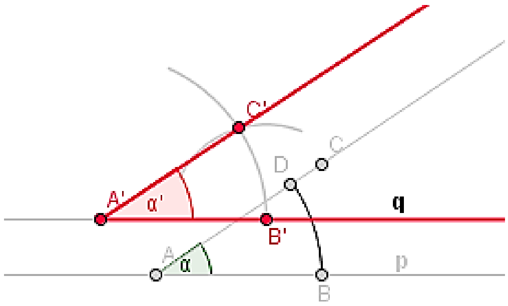
Nyní narýsujte stejnou část kružnice, o stejném poloměru, ale se středem v bodě A', tedy v místě, kde má být vrchol přenášeného úhlu. Tam, kde kružnice protne přímku q, se bude nacházet bod B'.



Nyní vezmeme do kružítka vzdálenost úsečky |BD|, zabodneme kružítko do bodu B' a narýsujeme kružnici. V bodě, kde tato kružnice protne předchozí část kružnice, se nachází bod C'.

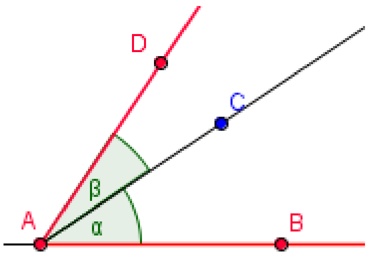


Nyní už máme všechny tři body potřebné k sestrojení nového úhlu B’A’C’.



Sčítání a odečítání úhlů

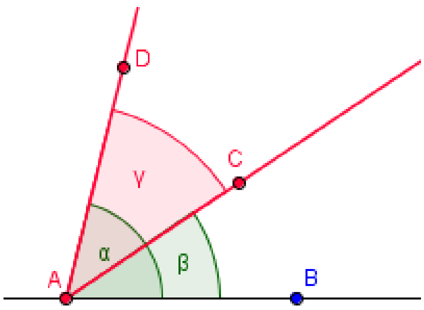
Pokud máme dva úhly, které potřebuje sečíst, můžeme použít tento postup. Vezmete jeden úhel, přenesete ho k druhému tak, aby měly jedno společné rameno, a výsledný úhel tvoří ramena, která mají ty dva úhly různá:



V tomto příkladu je znázorněn součet α + β.

Společné rameno polopřímka AC a různá ramena polopřímky AB a AD. Výsledek je úhel BAD.

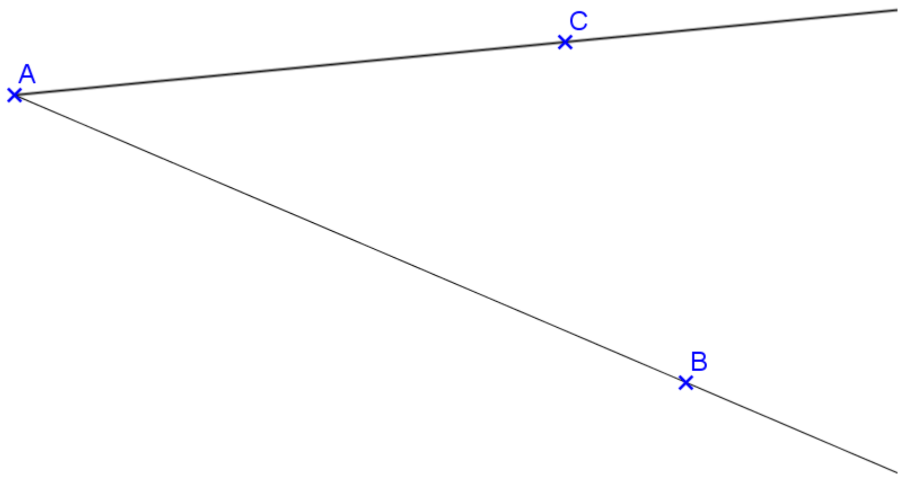
U odečítání to funguje velice podobně, akorát jeden úhel nepřenesete vně druhého úhlu, ale dovnitř úhlu. Poté od většího úhlu jakoby odečtete průnik těch dvou úhlů a máte rozdíl.



Obrázek znázorňuje rozdíl α − β. Červená část pak opět zvýrazňuje výsledný úhel.

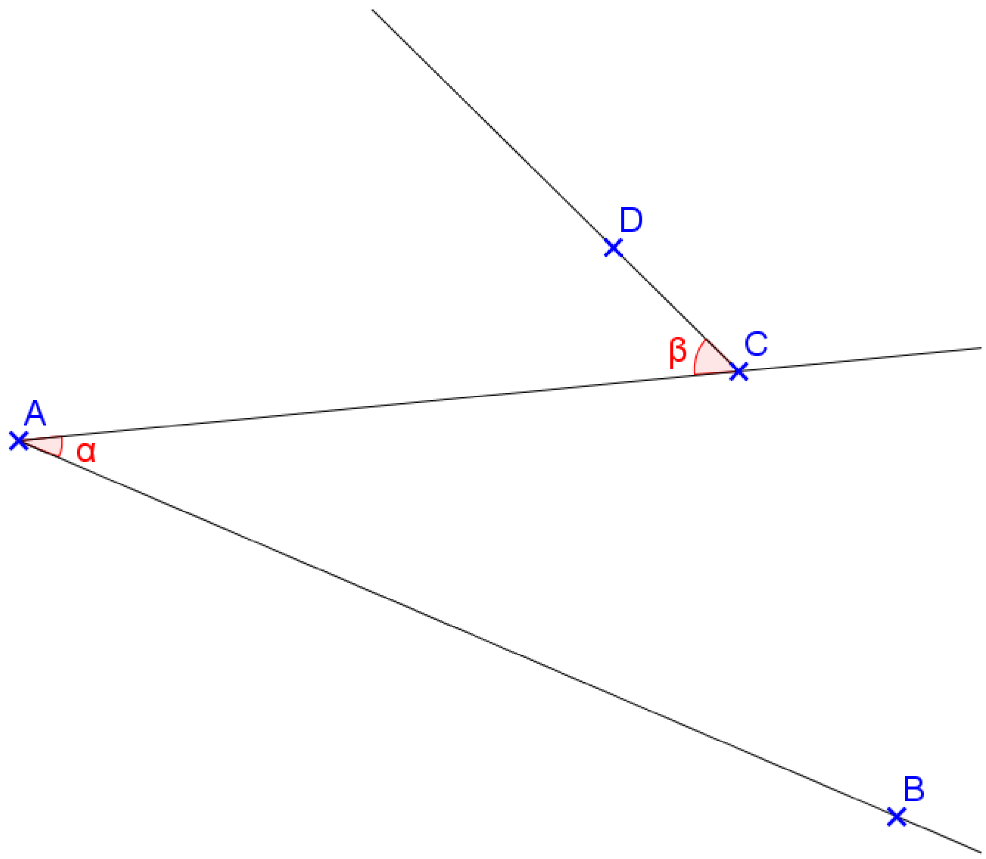
Úkol:

Je dán tupý úhel BAC, sestrojte jeho osu:



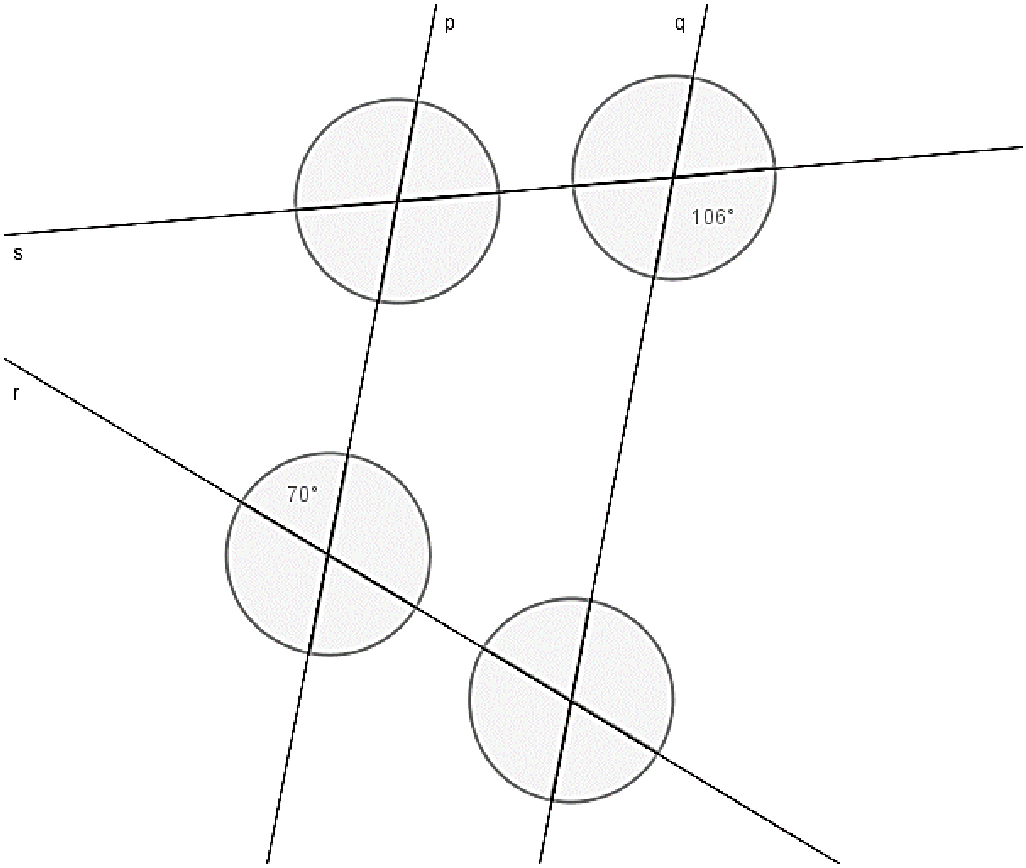
Úkol:

Sečtěte graficky úhly $\alpha + \beta$ (sestrojte úhel BAX o velikosti $\alpha + \beta$) :

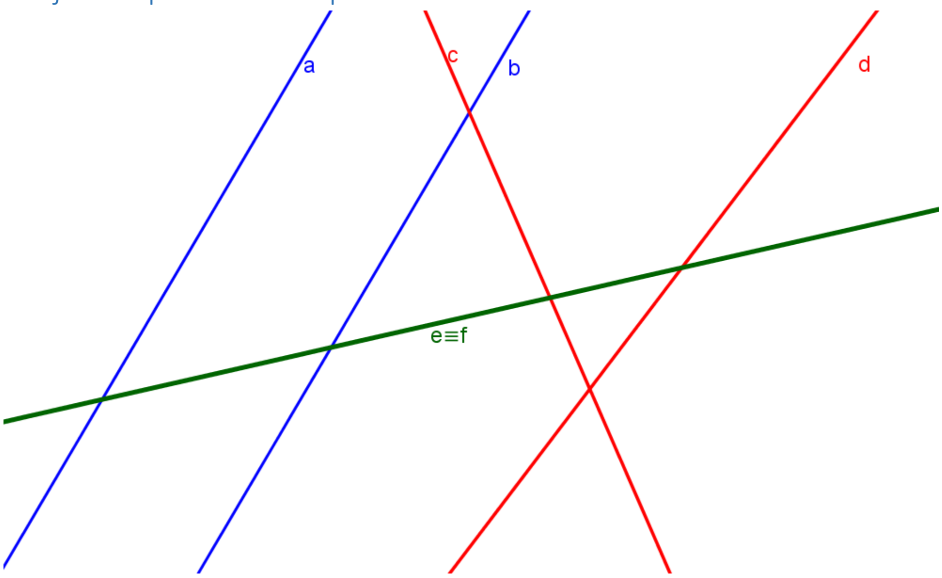


Úkol:

Doplňte velikosti všech úhlů



Vzájemná poloha dvou přímek v rovině



Na obrázku vidíme **rovnoběžné** přímky a, b,

různoběžné přímky c, d, které se protínají v jednom bodě

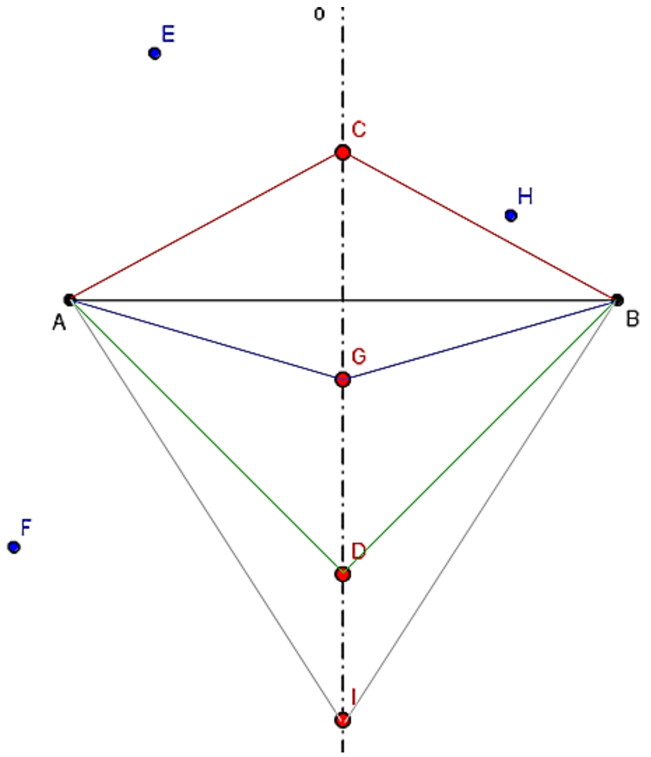
totožné přímky e, f.

Množina bodů dané vlastnosti

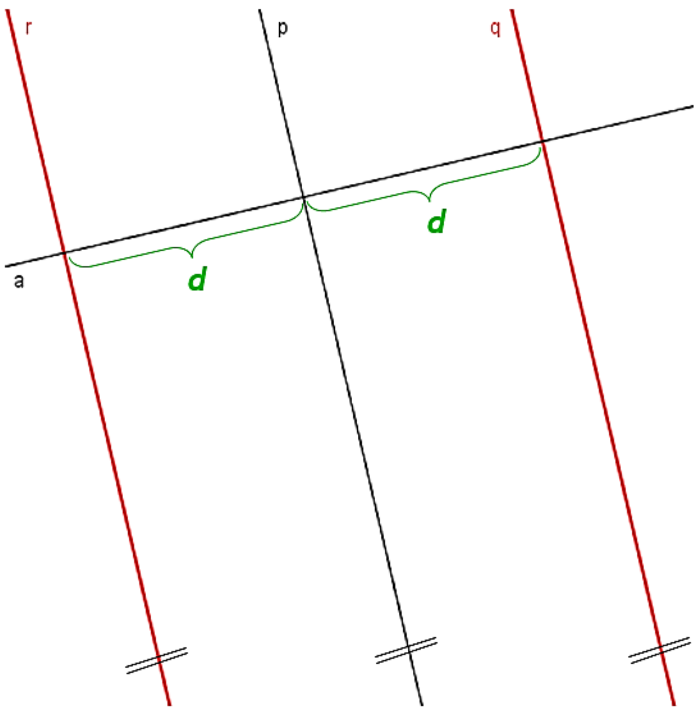
Množinou *M* všech bodů dané vlastnosti *V* rozumíme takový geometrický útvar *G*, jehož všechny body splňují následující dvě podmínky:

1) Každý bod útvaru G má danou vlastnost V.
2) A obráceně, každý bod, který má danou vlastnost V, je bodem útvaru G.

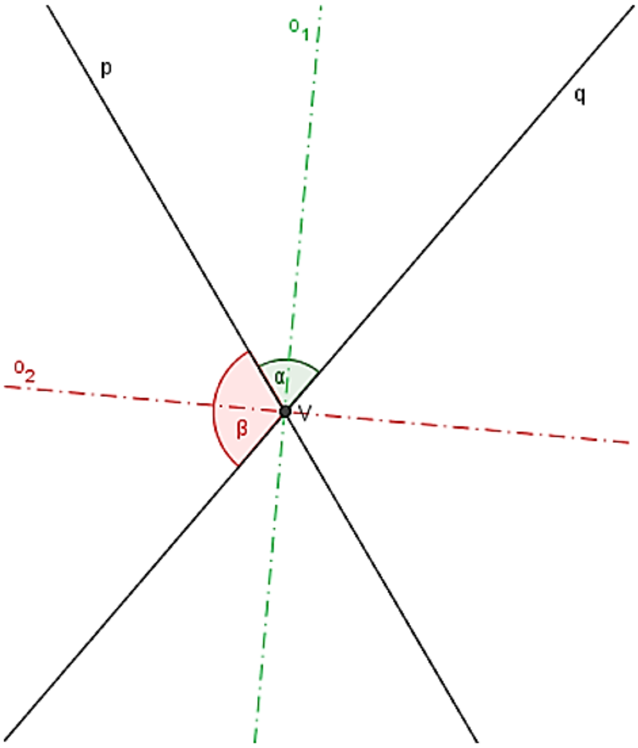
Osa *o* úsečky *AB* je množina všech bodů, které mají od bodů *A* a *B* stejnou vzdálenost.



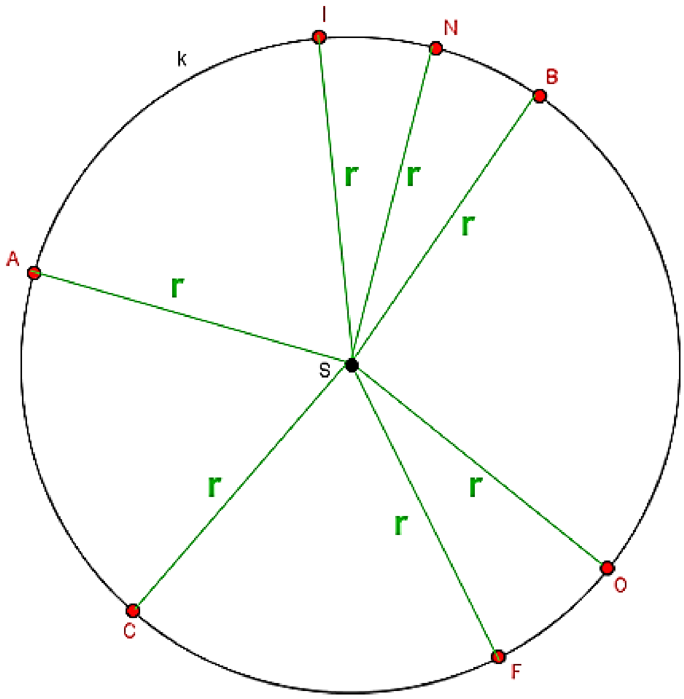
Množinou všech bodů, které mají od dané přímky *p* stejnou vzdálenost *d* cm, jsou dvě rovnoběžky *q*, *r* vzdálené o *d* cm od dané přímky *p*.



Množinou všech bodů, které mají od dvou různoběžných přímek stejnou vzdálenost, jsou osy úhlů vymezených těmito přímkami.



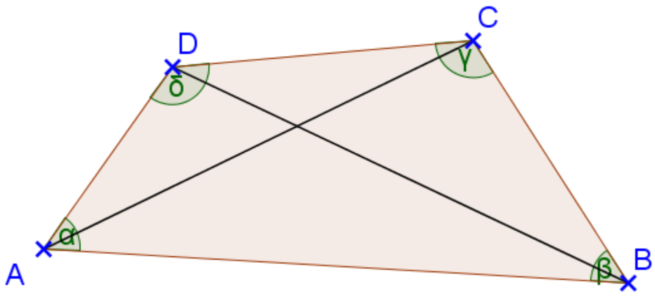
Kružnice *k (S;r*) je množina všech bodů *X* roviny, které mají od bodu *S* vzdálenost *r*.



Čtyřúhelníky

Základní prvky čtyřúhelníku:

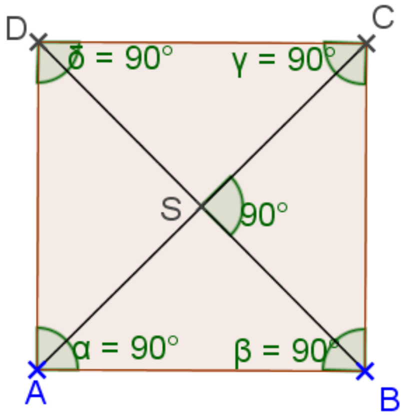
- vrcholy: A, B, C, D
- strany: AB, BC, CD, AD
- dvojice protějších stran: AB a CD, BC a AD
- úhlopříčky: AC, BD
- vnitřní úhly: α, β, γ, δ
- součet vnitřních úhlů každého čtyřúhelníku je 360°



Druhy čtyřúhelníků:

- Rovnoběžníky – čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník
- Lichoběžníky – obecný, pravoúhlý, rovnoramenný
- Různoběžníky

Čtverec



Je to čtyřúhelník, který má velikosti všech stran shodné (a), každé dvě protější strany, jsou rovnoběžné, dvě sousední strany jsou navzájem kolmé. Vrcholy a strany čtverce ABCD označujeme písmeny abecedy v pořadí, jak jdou za sebou, a to v protisměru pohybu hodinových ručiček. Strana a leží vedle vrcholu A v protisměru hodinových ručiček, strana b vedle vrcholu B, strana c vedle vrcholu C a strana d vedle vrcholu D.

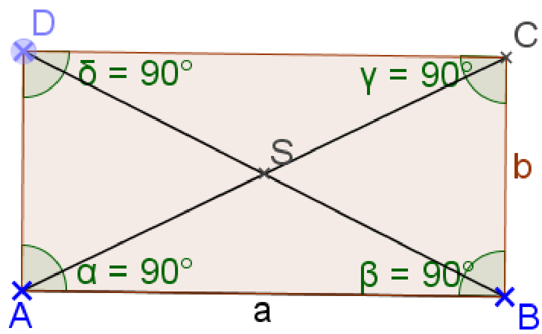
- Čtverec má čtyři stejně dlouhé strany a každý vnitřní úhel má velikost 90 stupňů.
- Každý čtverec ABCD má dvě úhlopříčky AC a DB. Úhlopříčka je vždy delší než strana čtverce. **Pokud má strana čtverce velikost *a*, pak úhlopříčka *u* má velikost** $|\boldsymbol{u}| = \boldsymbol{a}\sqrt{\mathbf{2}}$
- Úhlopříčky se navzájem půlí. Pokud vyznačíme střed čtverce bodem S (jako na obrázku), pak délka úsečky AS bude stejná jako délka úsečky CS.
- Úhlopříčka půlí úhel dvou sousedních stran. Například na obrázku má úhel ABC velikost 90 stupňů a úhel ABD má velikost 45 stupňů.
- Úhlopříčky spolu svírají pravý úhel.

Obsah, odvod:

o = 4a

S = a^2

Obdélník



Obdélník je čtyřúhelník, jehož všechny vnitřní úhly mají velikost 90 stupňů. Protilehlé strany obdélníku mají vždy stejnou velikost a jsou rovnoběžné.

- strany naproti sobě mají vždy stejnou délku, označujeme ji *a* a *b*
- Každý obdélník ABCD má dvě úhlopříčky AC a BD.

- Úhlopříčky mají vždy stejnou velikost. Jsou zároveň vždy delší než kterákoliv strana obdélníku. Další vlastnosti úhlopříček:
- Délka úhlopříčky: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$, podle Pythagorovy věty.
- Úhlopříčky mezi sebou nesvírají pravý úhel.
- Úhlopříčky se navzájem půlí.

Obsah, odvod:

o =2a+2b = 2(a+b)

S = a . b

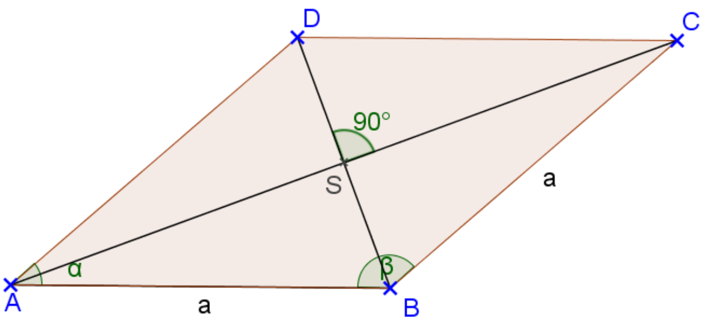
Úkol:

Sestrojte obdélník ABCD, je-li dána strana a = 7 cm a úhlopříčka |AC| = 8,5 cm.

Kosočtverec

je rovnostranný rovnoběžník, který má všechny strany stejně dlouhé. Obecně jeho strany nesvírají pravý úhel. Dva protilehlé úhly mají stejnou velikost, dva sousední úhly dávají součet 180°.

- Kosočtverec má dvě úhlopříčky.
- Jeho **úhlopříčky jsou na sebe kolmé a půlí se a nemají shodné velikosti**.
- Kosočtverec má dvě osy souměrnosti, kterými jsou úhlopříčky, a jeden střed souměrnosti, kterým je průsečík úhlopříček.
- Kosočtverci lze vepsat kružnici, která má střed v průsečíku úhlopříček.
- Obvod kosočtverce se vypočítá stejně jako u čtverce, protože má všechny strany stejně dlouhé



Obsah, odvod:

o = 4a

$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$

$S = a \cdot b \cdot sin\alpha$

Úkol:

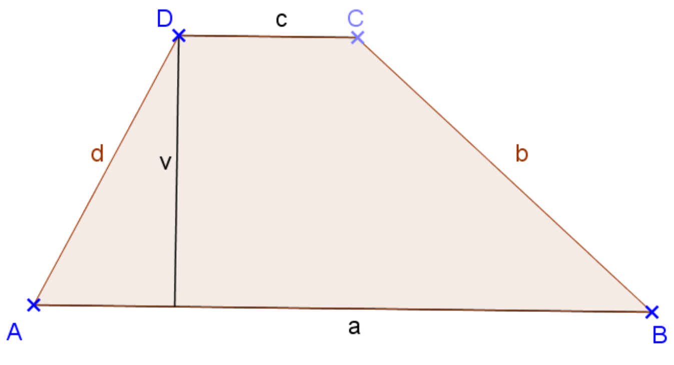
Sestrojte kosočtverec ABCD, je-li |AC|=10 cm, |BD|=6 cm.

Lichoběžník

je čtyřúhelník, který má právě jednu dvojici rovnoběžných stran.

Lichoběžníky se dělí na:

- obecný: ramena mají různé délky
- rovnoramenný: ramena mají stejné délky
- pravoúhlý: jedno rameno svírá se základnou pravý úhel



a, c – základna, b, d - ramena

Součet velikostí úhlů při jednom rameni je vždy 180°.

Součet velikostí všech vnitřních úhlů je 360 stupňů.

Výška lichoběžníku je kolmá vzdálenost rovnoběžných stran.

Úkol:

Sestrojte lichoběžník ABCD (AB||CD), je-li: a = 7 cm, c = 3 cm, α = 75°, v = 5 cm.

Úkol:

Sestrojte lichoběžník ABCD (AB||CD), je-li: a = 8 cm, c = 4 cm, d = 5 dm, α = 75°.

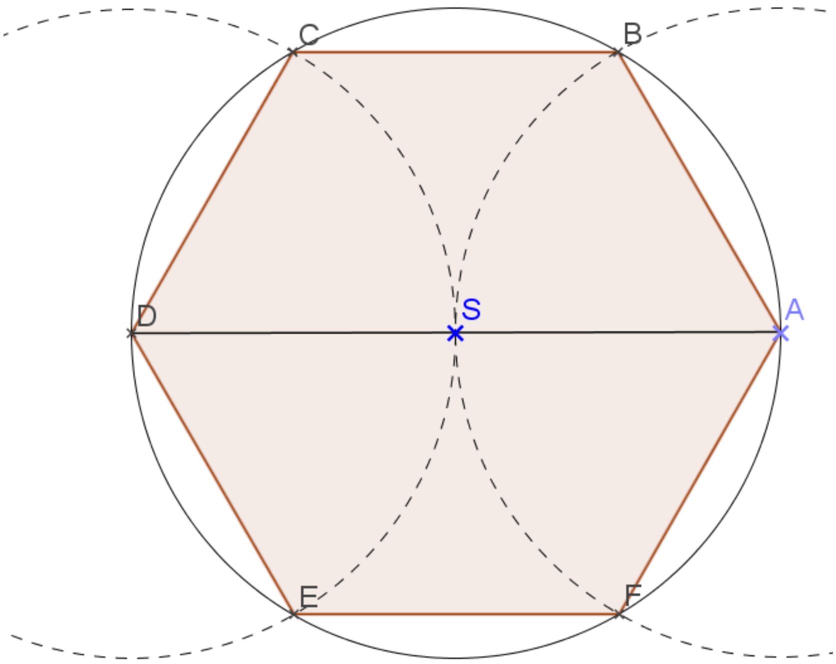
Úkol:

Sestrojte lichoběžník ABCD (AB||CD), je-li: a = 7 cm, c = 3 cm, IBDI = 6 dm, |∠ABD| = 45°.

Pravidelné n-úhelníky

Konstrukce pravidelného šestiúhelníku o straně a = 5 cm:

Sestrojíme kružnici k(S, r = 5 cm). Na kružnici libovolně zvolíme bod A a sestrojíme přímku AS. Přímka má s kružnicí společný bod D, A a D tvoří krajní body průměru. Sestrojíme kružnice k_1(A, r = 5 cm), k_2(D, r = 5cm). Tyto kružnice protnou kružnici k v bodech, jež jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníku.



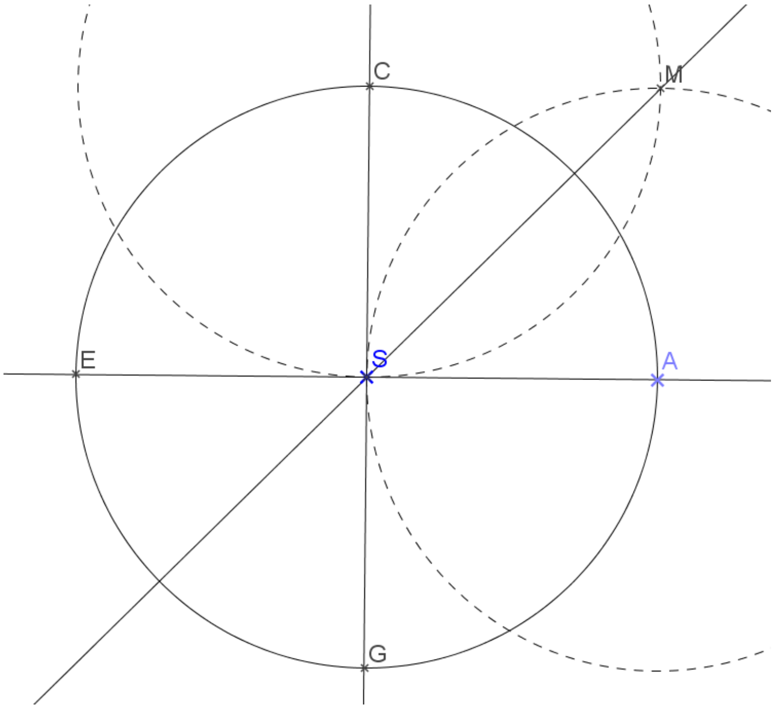
Úkol:

Sestroj pravidelný šestiúhelník o straně a = 4 cm.

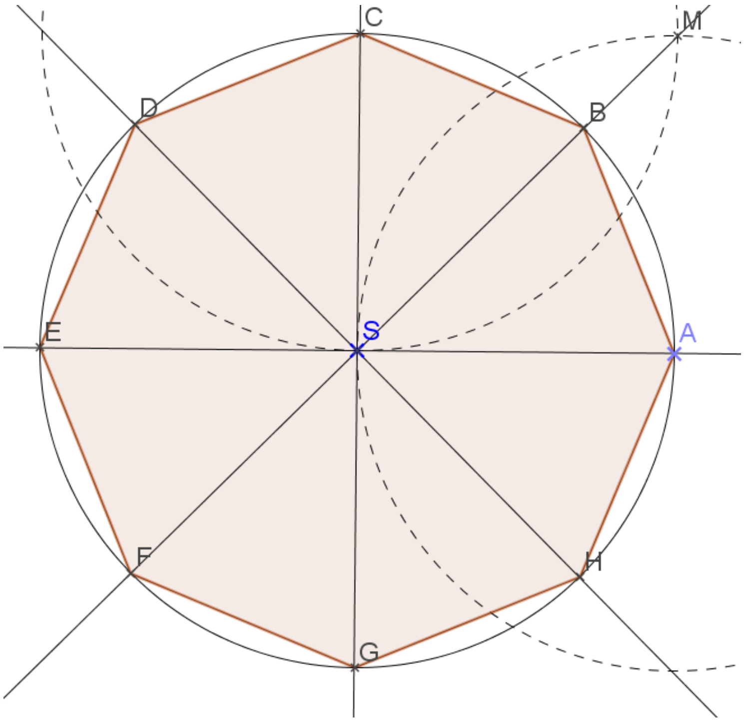
Pravidelný osmiúhelník

Konstrukce pravidelného osmiúhelníku, který je vepsán kružnici o poloměru r = 5 cm:

Na kružnici k zvolíme libovolně bod A, sestrojíme přímku AS, a najdeme druhý krajní bod průměru – bod E. Bodem S vedeme kolmici na přímku AS. Získáme dva body průměru CG.



Kružítkem sestrojíme osu úhlu CSA a bodem S vedeme na tuto osu kolmici. Získané průsečíky osy a kolmice s původní kružnicí jsou vrcholy osmiúhelníku.



Úkol:

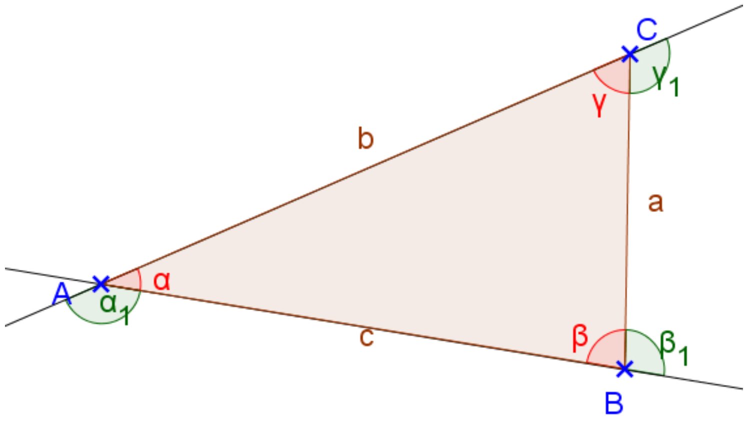
Sestroj pravidelný osmiúhelník, který je vepsán kružnici o poloměru r = 4 cm.

Trojúhelník

Trojúhelník △ABC s vrcholy A, B, C lze definovat jako průnik tří polorovin ↦ABC, ↦BCA a ↦CAB. Pokud tyto body leží v jedné přímce, potom takový trojúhelník neexistuje. Jedná se tedy o rovinný útvar ohraničený třemi úsečkami AB, AC, BC, které se nazývají strany trojúhelníku.

Strany trojúhelníku splňují trojúhelníkové nerovnosti:

Součet dvou libovolných stran je vždy delší než strana třetí:



$a + b > c$

$a + c > b$

$b + c > a$, kde a, b, c jsou strany trojúhelníka.

Součtem vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý (180°).

Úhly vedlejší k vnitřním úhlům, se nazývají **vnější úhly** trojúhelníka. Součet vnitřního a jeho vnějšího úhlu je 180°. Součet dvou vnitřních úhlů se rovná vnějšímu úhlu u zbývajícího vrcholu. (např. $\alpha + \beta = \gamma_1$)

Druhy trojúhelníků:

Podle stran

Obecný trojúhelník (též různostranný) – žádné dvě strany nejsou shodné

Rovnoramenný trojúhelník – dvě strany jsou navzájem shodné, ale nejsou shodné s třetí stranou

Rovnostranný trojúhelník – všechny strany jsou shodné

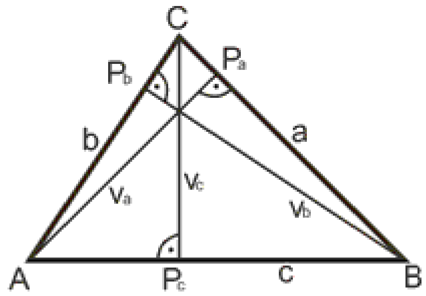
Podle úhlů

Ostroúhlý trojúhelník – všechny vnitřní úhly jsou ostré

Pravoúhlý trojúhelník – jeden vnitřní úhel je pravý, zbývající dva jsou ostré

Tupoúhlý trojúhelník – jeden vnitřní úhel je tupý, zbývající dva jsou ostré

Výšky trojúhelníku:



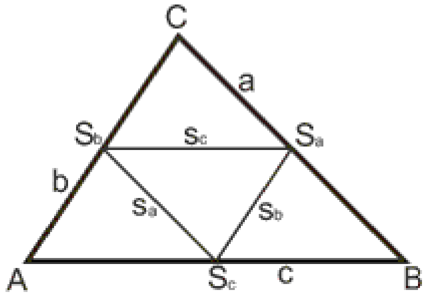
Výška je kolmice spuštěná z vrcholu na protější stranu.

Průsečík výšky s příslušnou stranou se nazývá pata výšky.

Každý trojúhelník má 3 výšky:

Výšky: v_a, v_b, v_c

Střední příčky:



Střední příčka je spojnice středů dvou stran.

Střední příčka je rovnoběžná s příslušnou stranou a má velikost poloviny příslušné strany.

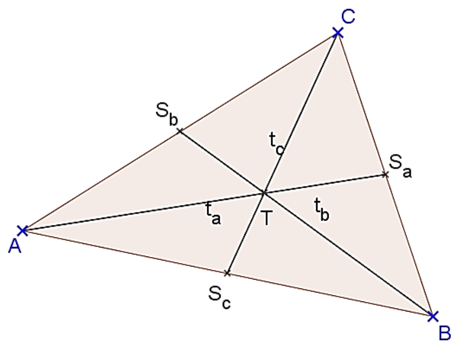
Střední příčky dělí trojúhelník na 4 shodné trojúhelníky.

Každý trojúhelník má 3 střední příčky:

Střední příčky: : s_a, s_b, s_c

Středy stran: S_a, S_b, S_c

Těžnice trojúhelníku:



Těžnice je spojnice vrcholu a středu protější strany.

Těžnice se protínají v jednom bodě, který se nazývá těžiště T.

Těžiště rozděluje každou těžnici na 2 díly v poměru 2:1 – vzdálenost těžiště od vrcholu je dvojnásobek vzdálenosti od středu protější strany.

Každá těžnice rozděluje trojúhelník na dva díly se stejným obsahem. Každý trojúhelník má 3 těžnice.

Těžnice: t_a, t_b, t_c

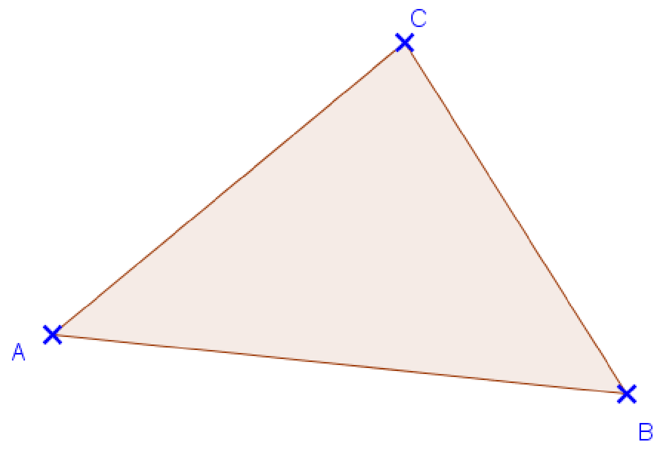
Středy stran: S_a, S_b, S_c

Trojúhelníku lze **opsat kružnici**, kde střed kružnice opsané leží v průsečíku **os stran** a poloměr se rovná vzdálenosti středu od libovolného vrcholu.

Trojúhelníku lze **vepsat kružnici**, kde střed kružnice opsané leží v průsečíku **os úhlů** a poloměr se rovná vzdálenosti středu od libovolné strany.

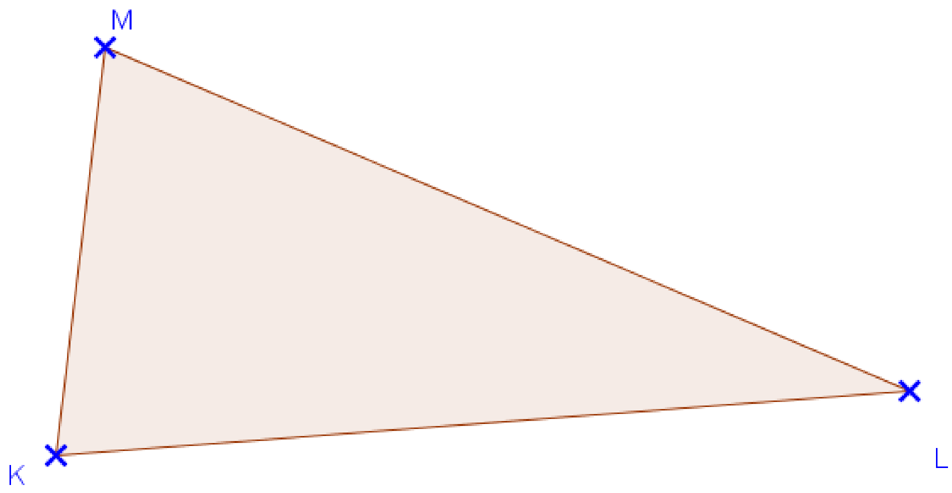
Úkol:

Trojúhelníku ABC opište kružnici.



Úkol:

Trojúhelníku KLM vepište kružnici.



Příklad:

Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém a = 5 cm, b= 7 cm, c = 8 cm.

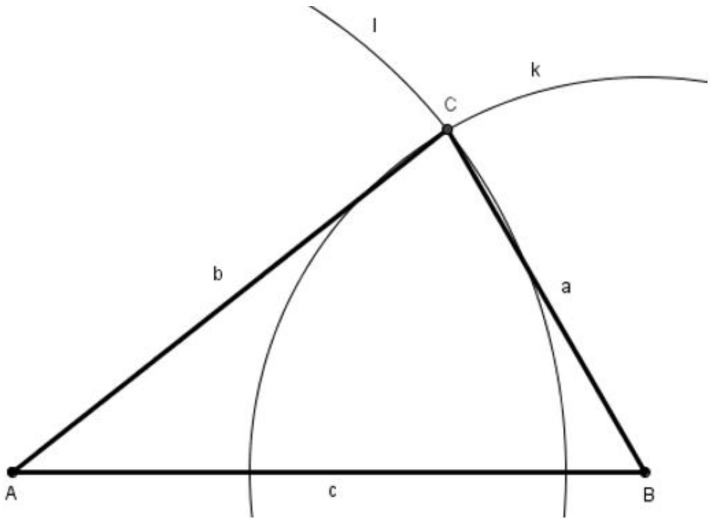
Součástí řešení úlohy je náčrtek s rozborem.

Zápis konstrukce:

1) AB; |AB| = c = 8 cm
2) k; k(B; a = 5 cm)
3) l; l(A; b = 7 cm)
4) C; $C \in k \cap l$
5) Δ ABC

Diskuse o počtu řešení:

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení.



Úkol:

Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém α = 40°, b = 4 cm, c = 5 cm.

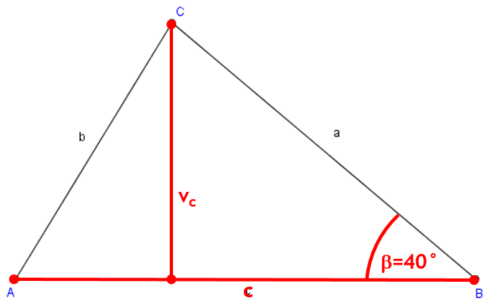
Úkol:

Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém α = 40°, β = 60°, c = 8 cm.

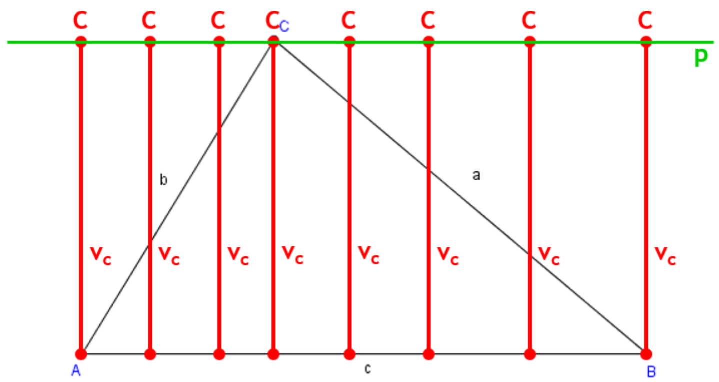
Konstrukce trojúhelníku, je-li dána v zadání výška.

Příklad:

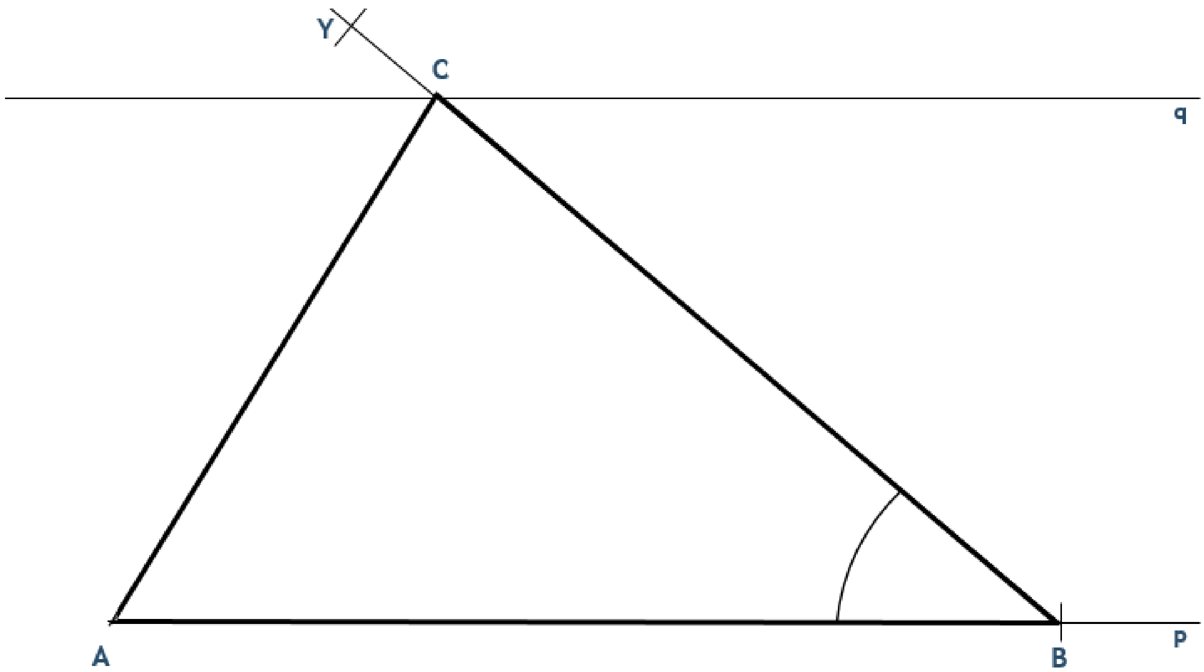
Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém $c = 9$ cm, $v_c = 5$ cm, $\beta = 40°$.



Jak sestrojíme bod C? Co o něm víme? Víme, že jeho kolmá vzdálenost od strany c je 5 cm ($v_c = 5$ cm). Kde se tedy může nacházet bod splňující danou podmínku? Co je množinou všech bodů, jejichž kolmá vzdálenost od strany c je 5 cm? Je přímka rovnoběžná se stranou c, sestrojená ve vzdálenosti 5 cm.



1) $AB;\ |AB| = c = 9$ cm
2) $q;\ q \parallel AB,\ |q, AB| = v_c = 5$ cm
3) $\mapsto BY;\ |\measuredangle ABY| = \beta = 40°$,
4) $C;\ C \in q \cap \rightarrow BY$
5) ΔABC



Ve zvolené polorovině má úloha jedno řešení.

Pamatujte si!

Je-li při konstrukci trojúhelníku zadána výška, použijeme ji většinou ve druhém kroku konstrukce k sestrojení rovnoběžky s příslušnou stranou ve vzdálenosti dané velikostí výšky.

Úkol:

Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém c = 8 cm, v_c = 4 cm, b = 5 cm.

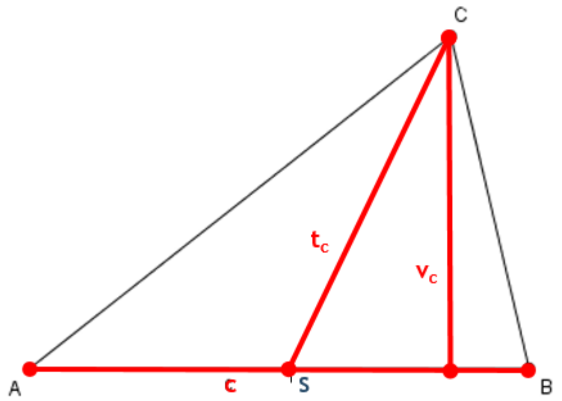
Úkol:

Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže b= 6 cm, a= 4,5 cm, v_b= 3 cm.

Konstrukce trojúhelníku, známe-li jednu stranu a těžnici i výšku k ní příslušnou.

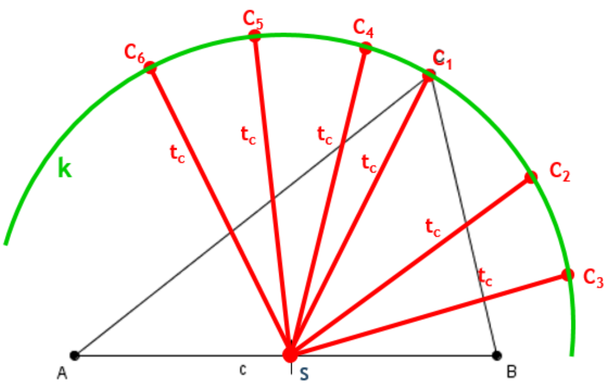
Příklad:

Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém $c = 6$ cm, $v_c = 4$ cm, $t_c = 4{,}5$ cm.

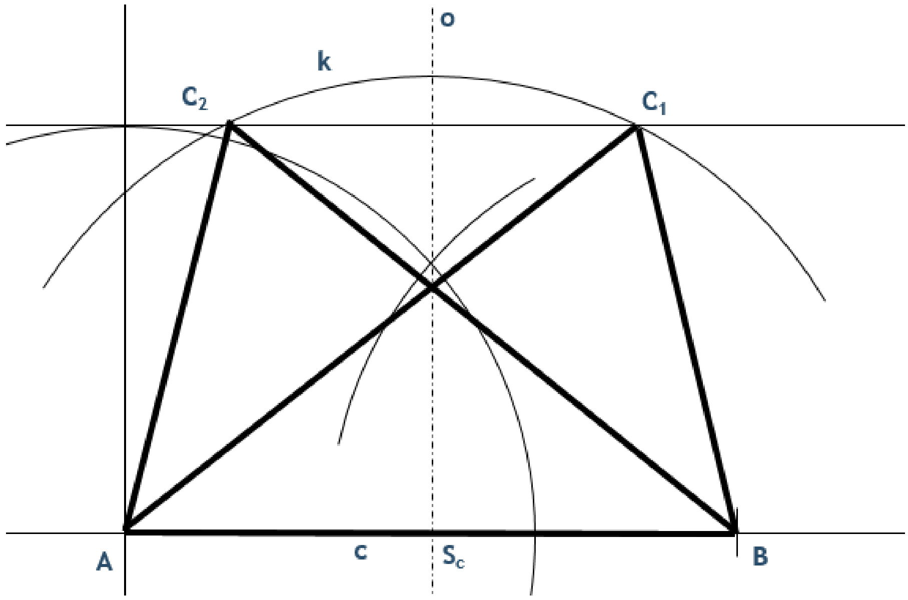


Z předchozí úlohy víme, že začneme stranou c a druhým krokem bude sestrojení přímky p II AB ve vzdálenosti v_c.

Jak sestrojíme bod *C* pomocí zadané těžnice? Co o něm víme? Víme, že jeho vzdálenost od středu strany *c* je 4,5 cm ($t_c = 4{,}5$ cm). Kde se tedy může nacházet bod splňující danou podmínku? Co je množinou všech bodů, jejichž vzdálenost od středu strany *c* je 4,5 cm? Je to kružnice se středem ve středu strany *c* a poloměrem o velikosti t_c, tj. 4,5 cm.



1. AB; |AB|=c = 6 cm
2. p; p||AB, |p,AB|=vc = 4 cm
3. Sc; Sc∈AB, |ASc| = |ScB|
4. k; k(Sc; tc = 4,5 cm)
5. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$
6. Δ ABC_1, Δ ABC_2



Úloha má ve zvolené polorovině dvě řešení.

Pamatujte si!

Je-li při konstrukci trojúhelníku zadána těžnice, použijeme ji k sestrojení kružnice se středem ve středu příslušné strany a poloměrem o velikosti dané těžnice.

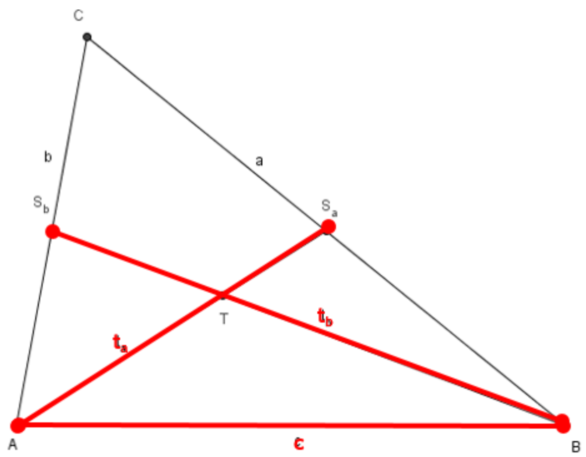
Úkol:

Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $c = 5$ cm, $v_c = 3$ cm, $t_c = 3$ cm

Konstrukce trojúhelníku, známe-li jednu stranu a dvě těžnice k ní nepříslušející.

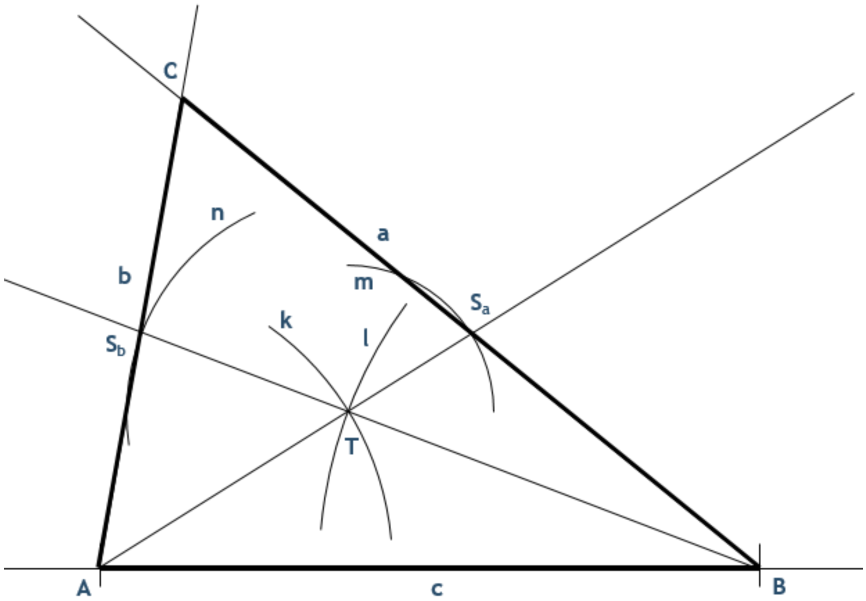
Příklad:

Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém $c = 9$ cm, $t_a = 6$ cm, $t_b = 9$ cm.



Ke konstrukci využijeme těžiště: těžiště dělí těžnice v poměru 2:1 tak, že delší úsek těžnice leží vždy u vrcholu. To znamená, že úsek těžnice od vrcholu do těžiště tvoří vždy 2/3 celkové délky těžnice. Začneme konstrukcí trojúhelníku ABT, prodloužíme polopřímky AT a BT, najdeme středy stran a a b a pomocí polopřímek AS_b, BS_a dokončíme konstrukci.

Zápis konstrukce



1) AB; |AB|=c= 9 cm
2) k; k(A; 2/3 t_a= 4 cm)
3) l; l(B; 2/3 t_b= 6 cm)
4) T; T $\in$ k $\cap$ l
5) $\rightarrow$ AT
6) m; m(T; 1/3 t_a= 2 cm)
7) Sa; Sa $\in \rightarrow$ AT $\cap$ m
8) $\rightarrow$ BT
9) n; n(T; 1/3 t_b= 3 cm)
10) S_s; $S_s \in \rightarrow$ BT $\cap$ n
11) $\rightarrow BS_a$
12) $\rightarrow AS_b$
13) C; C $\in \rightarrow BS_a \cap \rightarrow AS_b$
14) Δ ABC

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení

Konstrukce trojúhelníku, známe-li jednu stranu, jeden úhel k ní přilehlý a těžnici k dané straně

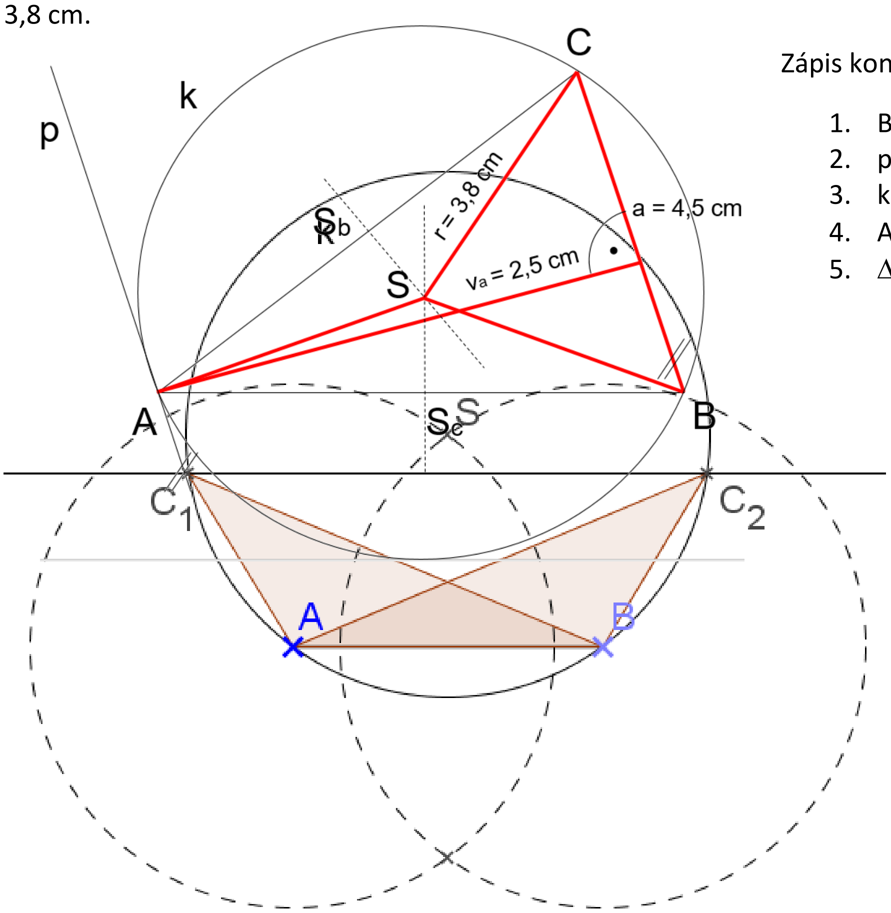
Úkol:

Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém c = 7 cm, α = 60°, t_c = 4 cm.

Konstrukce trojúhelníku, známe-li jednu stranu, příslušnou výšku a poloměr kružnice opsané.

Příklad:

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka strany a = 4,5 cm, v_a = 2,5 cm a poloměr kružnice opsané r = 3,8 cm.



Zápis konstrukce:

1. BCS (sss)
2. p; p II BC, |p; BC| = 2,5 cm
3. k; k(S; r = 3,8 cm)
4. A; A ∈ p ∩ k
5. ∆ ABC

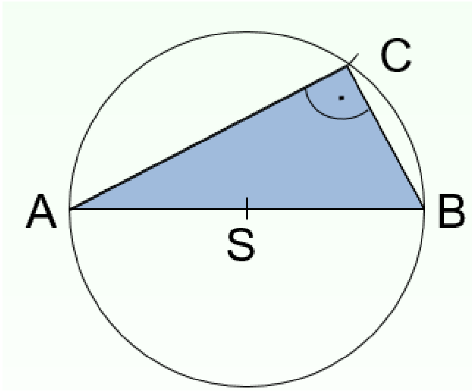
Ve zvolené polorovině má úloha dvě řešení.

Úkol:
Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka strany b = 5 cm, v_b = 4 cm a poloměr kružnice opsané r = 3,5 cm.

Thaletova věta

Jestliže Δ ABC je pravoúhlý s přeponou AB, pak vrchol C (pravý úhel) leží na kružnici k s průměrem AB (platí pro libovolný Δ).

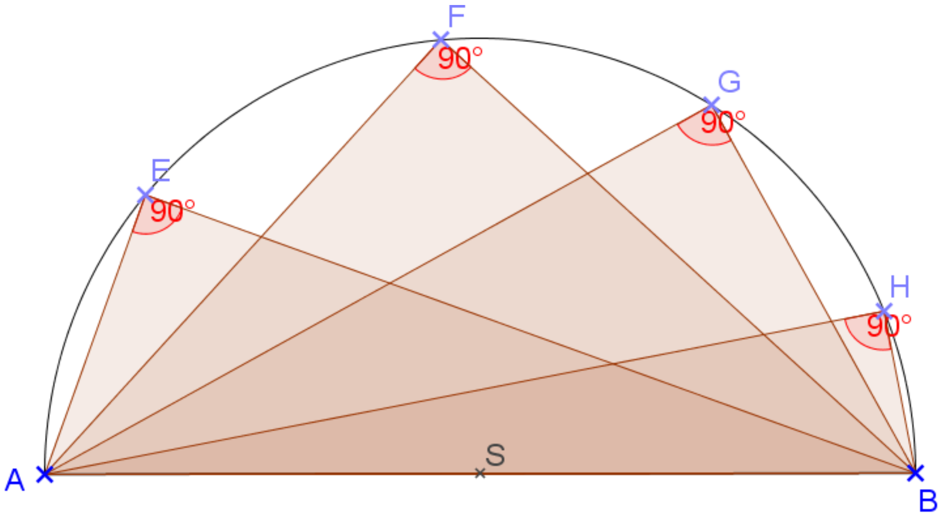
(Tháles z Milétu asi 624 – 547 př. n. l., řecký filosof, matematik a astronom)



Thaletova kružnice

- kružnice opsaná pravoúhlému Δ

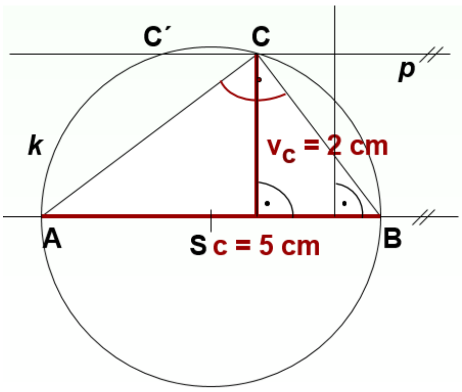
Thaletova kružnice je taková kružnice, která má střed uprostřed přepony pravoúhlého trojúhelníku a poloměr rovný polovině přepony.



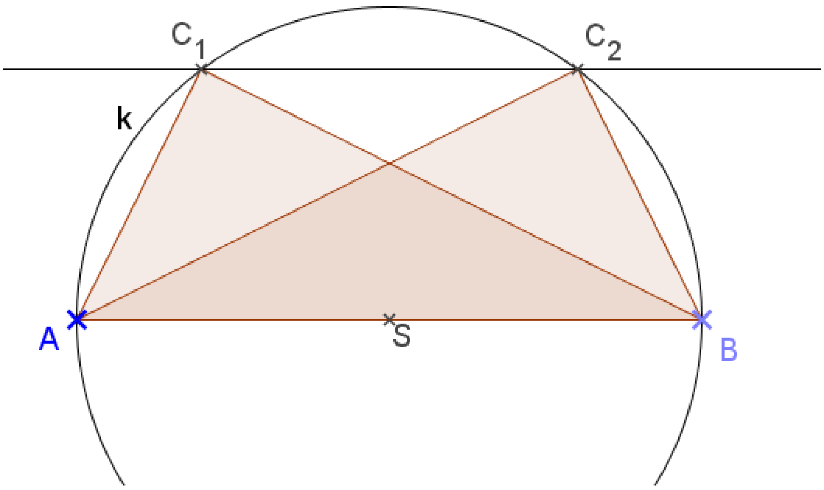
Příklad:

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li c = 5 cm, v_c = 2 cm.

Náčrt a rozbor:



1) AB; |AB| = 5 cm
2) p; p ∥ AB ve vzdálenosti vc = 2 cm
3) S; S je střed AB
4) k; k (S; |SA| = 2,5 cm)
5) C; C ∈ p ∩ k
6) Δ ABC



Ve zvolené polorovině má úloha dvě řešení.

Úkol:

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li c = 6,6 cm, v_c = 3 cm.

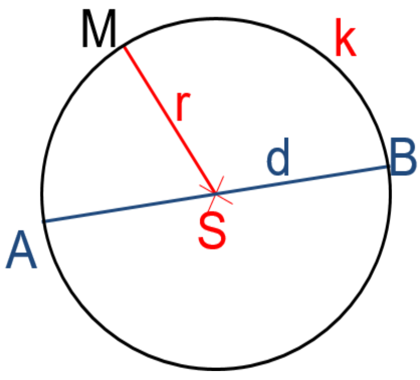
Úkol:

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, ve kterém přepona c = 7 cm a odvěsna b = 5,5 cm.

Kružnice

Množina všech bodů roviny, jejichž vzdálenost od bodu *S* je rovna *r*, se nazývá **kružnice**.

Množina všech bodů roviny, jejichž vzdálenost od bodu *S* je menší než *r* nebo se rovná *r*, se nazývá **kruh**.



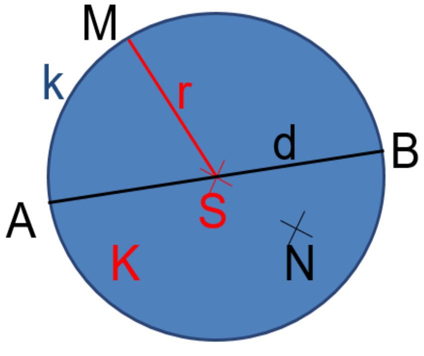
S - střed kružnice

r - poloměr kružnice

|AB| = *d* - průměr kružnice; *d = 2.r*

k (S, r)

= kružnice *k* se středem v bodě *S* a poloměrem *r*



S - střed kruhu, *r* - poloměr kruhu

|AB| = *d* - průměr kruhu; *d = 2.r*

M, N - body kruhu, N vnitřní bod

K (S, r)

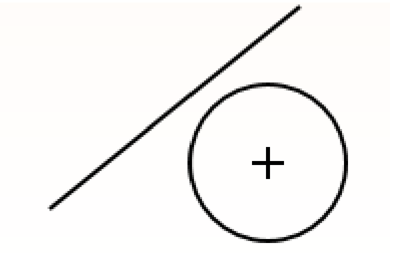
= kruh *K* se středem v bodě *S* a poloměrem *r*

Kružnice *k(S, r)* ohraničuje kruh *K(S, r).*

Vzájemná poloha přímky a kružnice

Vnější přímka

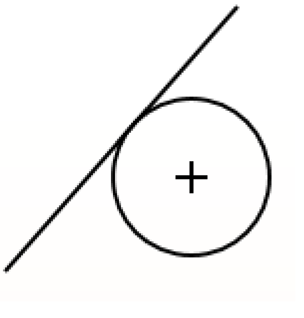
- přímka, která **nemá** s kružnicí **žádný společný bod**



Tečna

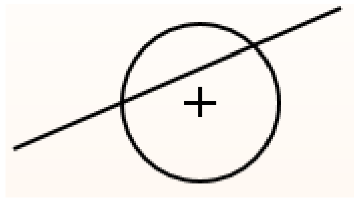
- přímka, která má s kružnicí **jeden společný bod**

Tečna je vždy v bodě dotyku kolmá na poloměr kružnice.



Sečna

- přímka, která má s kružnicí **dva společné body**



Sestrojení tečny ke kružnici:

1) Bod dotyku leží na kružnici

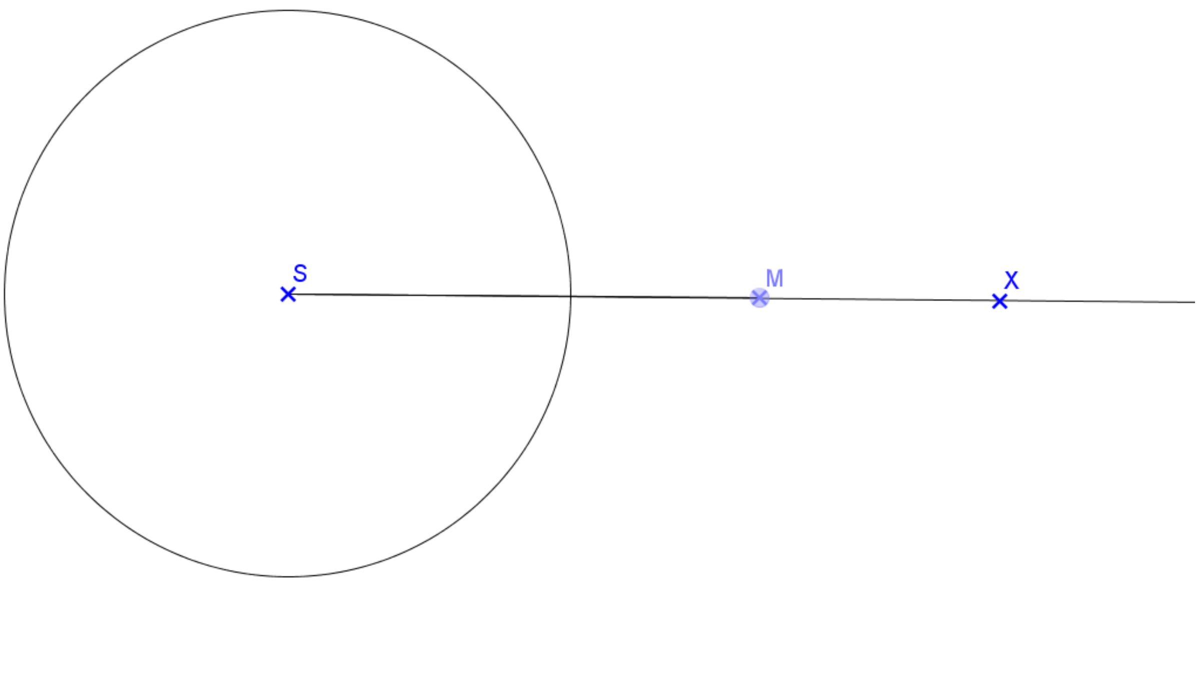
Úkol:

Sestrojte kružnici *k(S; 2,5 cm).* Na kružnici *k* zvolte bod *T*. Sestrojte tečnu, která je tečnou kružnice v bodě T.

2) Bod dotyku leží mimo kružnici

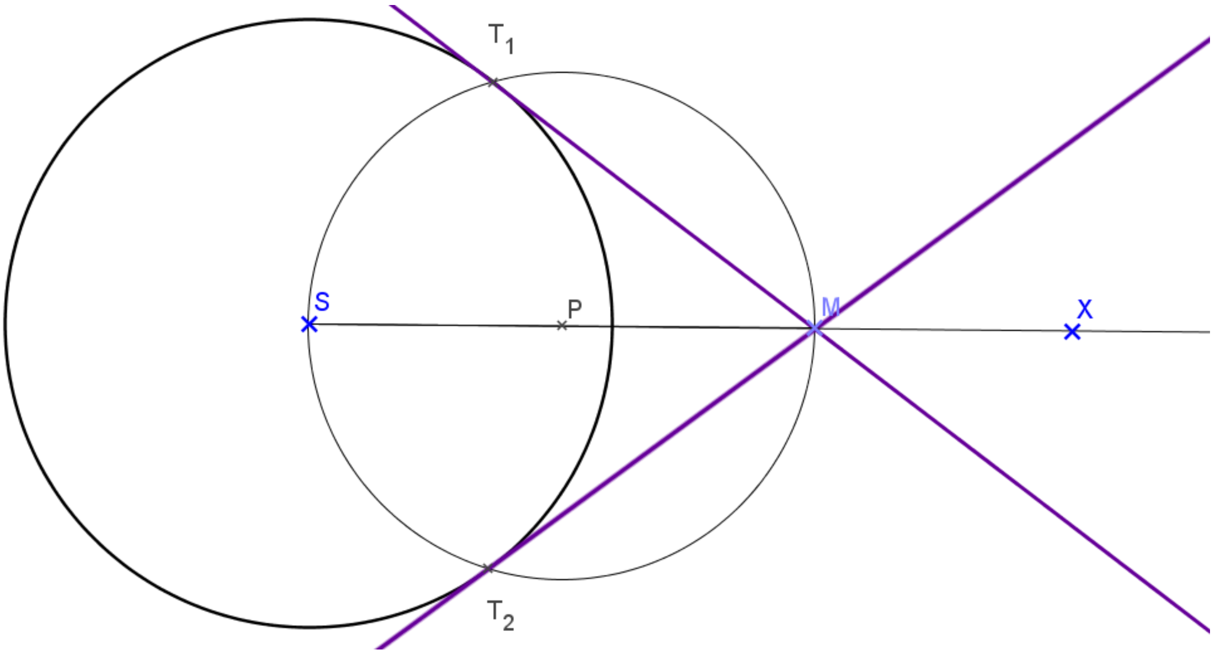
Příklad:

Je dána kružnice k(S; 3 cm). Na polopřímce SX zvolte bod M, tak aby ISMI = 5 cm. Z bodu M sestrojte tečnu ke kružnici, najděte bod dotyku T.



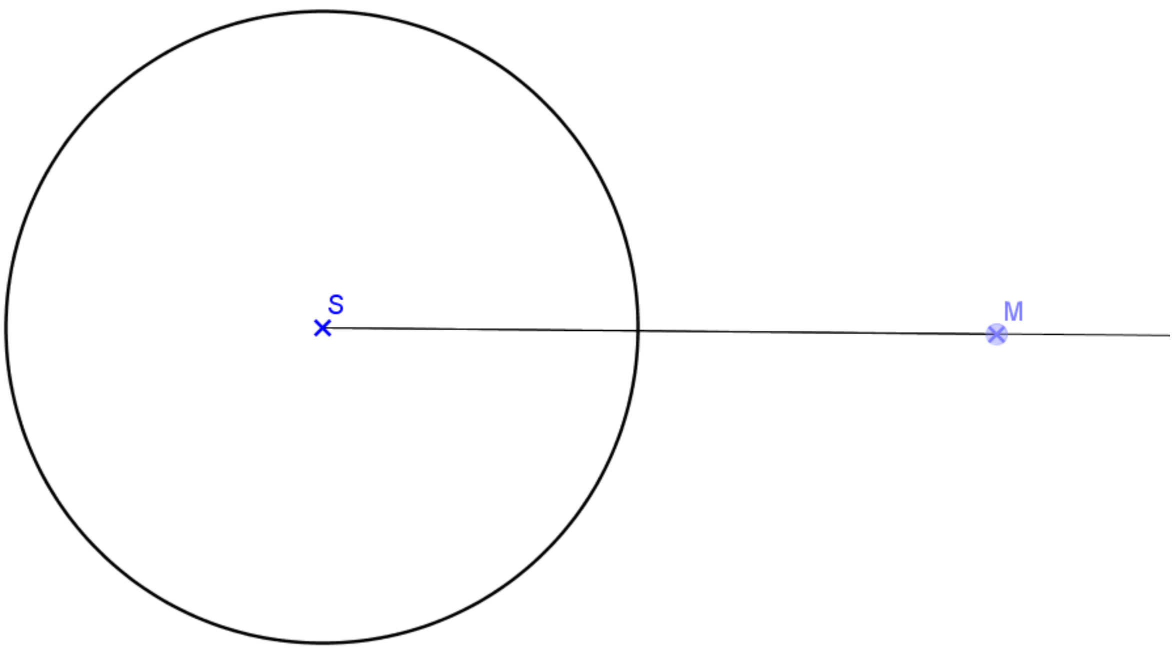
K řešení použijeme Thaletovu kružnici. Hledáme bod dotyku tečny, aby tečna splňovala podmínku, že je v bodě dotyku kolmá na poloměr, musí bod dotyku T ležet na Thaletově kružnici, body S a M tvoří krajní body průměru.

Nejprve tedy najdeme střed úsečky SM – bod P. Dále sestrojíme Thaletovu kružnici se středem P a poloměrem MP. Bod dotyku T je průsečíkem obou kružnic. Úloha má dvě řešení.



Úkol:

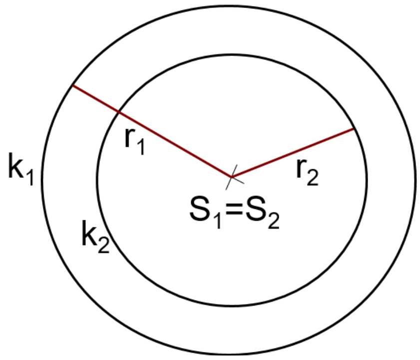
Je dána kružnice k a bod M. Z bodu M sestrojte tečnu ke kružnici, najděte bod dotyku T.



Vzájemná poloha dvou kružnic

1) **soustředné kružnice**

= kružnice, které mají společný střed - nemají žádný společný bod.

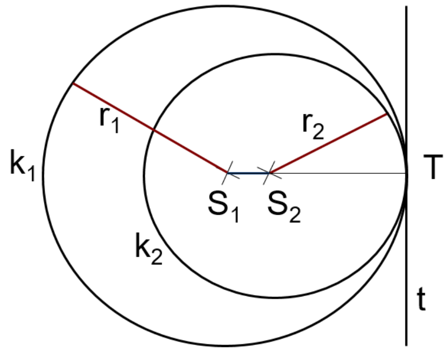


$S_1 = S_2 \wedge r_1 > r_2 \Rightarrow k_1 \cap k_2 = \theta$

$|S_1S_2| = 0$ cm

2) kružnice **mají vnitřní dotyk**.

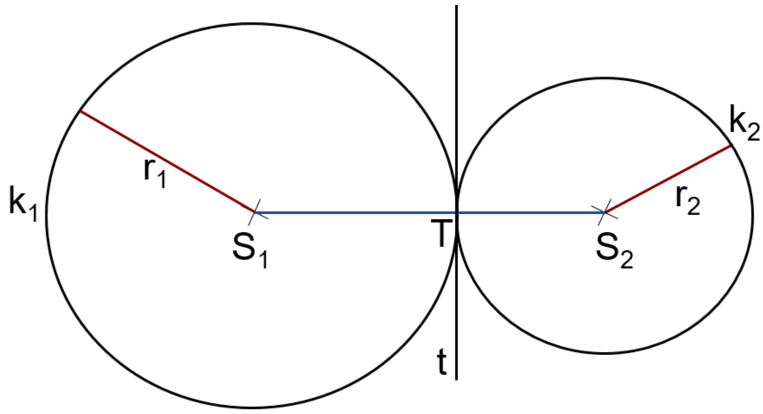
mají jeden společný bod T; T je bod dotyku kružnic se společnou tečnou *t.*



$|S_1S_2| = r_1 - r_2$

3) kružnice **mají vnější dotyk**.

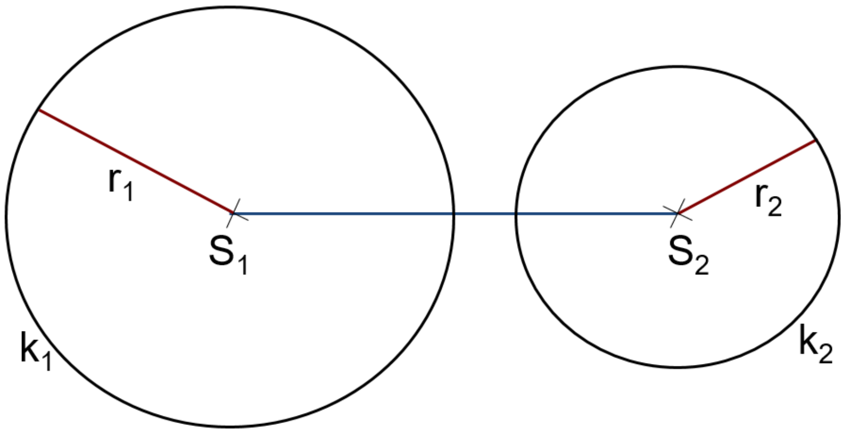
mají jeden společný bod T; T je bod dotyku kružnic se společnou tečnou *t.*



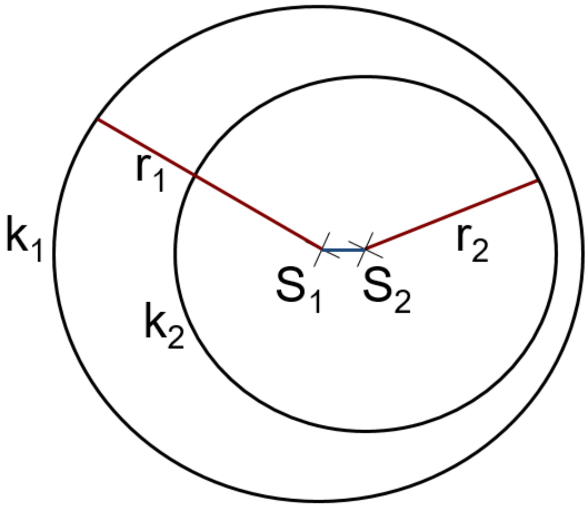
$r_1 + r_2 = |S_1S_2|$

4) kružnice **nemají žádný společný bod.**

$r_1 - r_2 < \ \ r_1 + r_2 < |S_1S_2|$



$|S_1S_2| < r_1 - r_2$



Několik úloh závěrem:

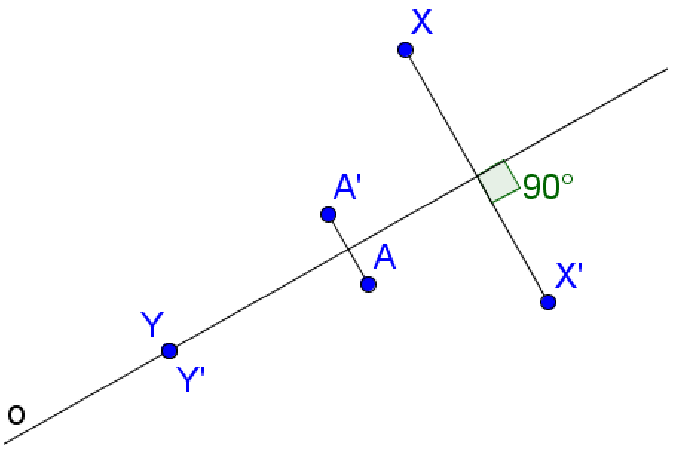
1) Sestrojte trojúhelník, je-li dáno:
   a) $a = 3$ cm, $b = 6$ cm, $\alpha = 30°$
   b) $c = 7{,}2$cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 15°$
   c) $c = 8$ cm, $\alpha = 45°$, $\chi = 70°$
2) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
   a) $a = 4{,}2$ cm, $v_a = 5$ cm, $\beta = 30°$
   b) $c = 3{,}8$ cm, $b = 5{,}1$ cm, $t_c = 5{,}1$ cm
   c) * $b = 3$ cm, $t_c = 2{,}5$ cm, $t_a = 4$ cm
   (Návod: Využijte vlastnosti těžiště.)

Geometrická zobrazení

Osová souměrnost

Definice:

Je dána přímka o. Osová souměrnost s osou o je shodné zobrazení O(o), které přiřazuje: každému bodu X neležícímu na ose o bod X' tak, že přímka o je osou úsečky XX', každému bodu Y ležícímu na ose o bod Y' = Y . Osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti.

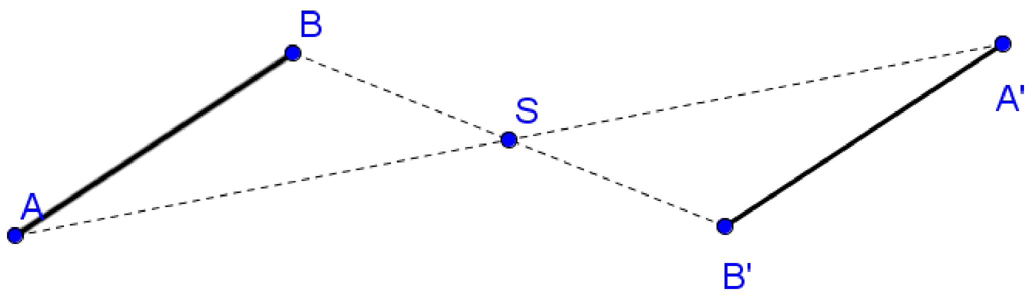


Středová souměrnost

Definice: je dán bod S. Středová souměrnost se středem S je shodné zobrazení S(S), které přiřazuje:

1. každému bodu X ≠ S bod X´ tak, že bod S je středem úsečky XX´,

2. bodu S bod S´ = S



středová souměrnost je jednoznačně určena středem S souměrnosti