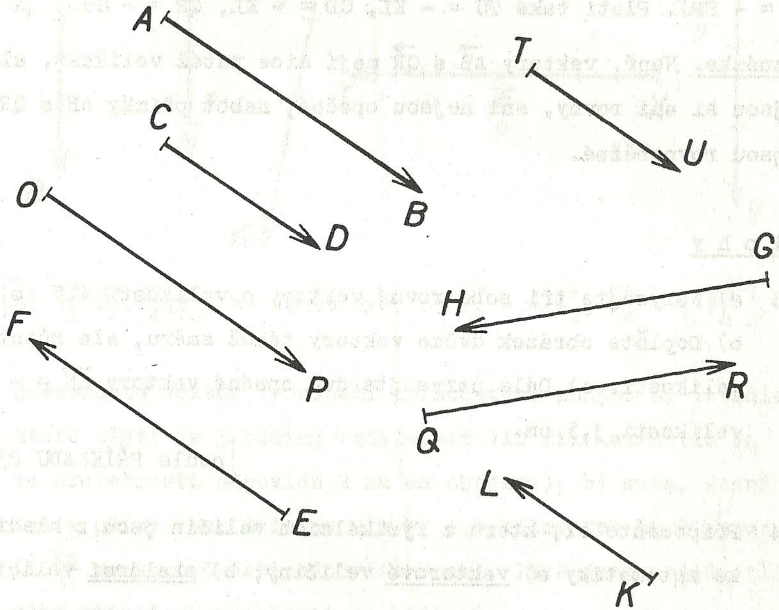
XIV. VEKTORY

PŘÍKLAD 83

Na obrázku jsou znázorněny vektory. Zjistěte, které z vektorů a) mají tutéž velikost; b) jsou si rovny; c) jsou opačné.



Řešení

a) Změřením, popř. porovnáním pomocí kružítka zjistíme, že úsečky AB, OP, EF, GH a QR mají tutéž délku, a proto i vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ a $\overrightarrow{QR}$ mají tutéž velikost. Obdobně zjistíme, že i vektory $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KL}$ a $\overrightarrow{TU}$ mají stejnou velikost.

b) Protože přímky AB a OP jsou rovnoběžné a vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{OP}$ mají stejný směr i stejnou velikost, jsou si vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OP}$ rovny, což zapisujeme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$. Obdobně platí $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{CD}$.

Poznámka. O sobě rovných různých vektorech též říkáme, že představují různá umístění téhož volného vektoru. Píšeme pak např. $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ (nebo též $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$), $\overrightarrow{OP} \in \vec{a}$ (nebo též $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$) atp.

c) Tutéž velikost, ale opačný směr (což znamená, že leží v rovnoběžných přímkách) mají např. vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{EF}$, které nazýváme opačné; zapisujeme to $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EF}$. Dále je $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OP}$ (nebo $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{EF}$). Platí také $\overrightarrow{TU} = -\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{GH}$.

Poznámka. Např. vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{QR}$ mají sice tutéž velikost, ale nejsou si ani rovny, ani nejsou opačné, neboť přímky AB a QR nejsou rovnoběžné.

Úlohy

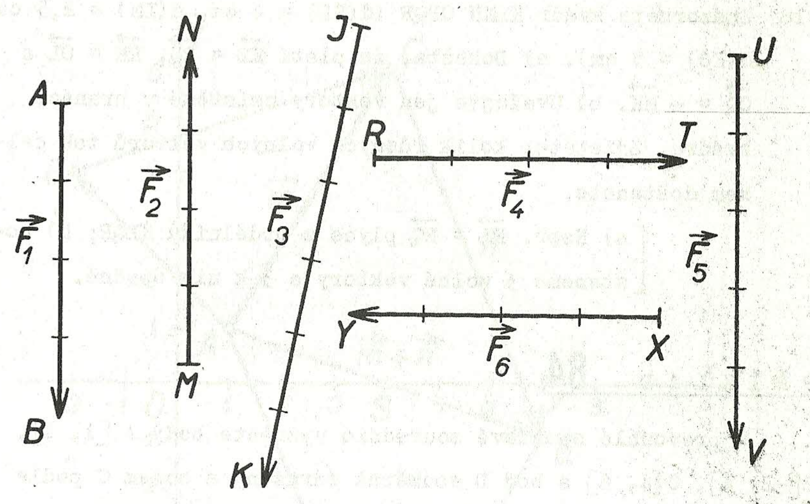
913 a) Narýsujte tři sobě rovné vektory o velikosti 4,5 cm. b) Doplňte obrázek dvěma vektory téhož směru, ale různých velikostí. c) Dále narýsujte dva opačné vektory $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{UV}$ velikosti 3,5 cm.

[podle PŘÍKLADU 83]

914 Připomeňte si, které z fyzikálních veličin jsou z hlediska matematiky a) vektorové veličiny; b) skalární veličiny.

[a) např. síla, rychlost, ...; b) teplota, objem,...]

915 Na obrázku jsou znázorněny síly $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, ..., $\vec{F_6}$. Určete, a) které z těchto sil mají stejnou velikost; b) které jsou si rovny; c) které jsou znázorněny opačnými vektory. (1 dílek $\hat{=}$ 3 N.)



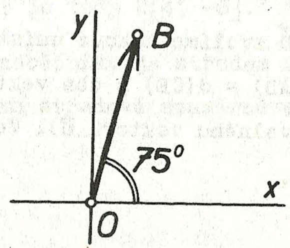
[a) $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_4}, \vec{F_6}$; b) žádné dvě; c) $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$, $\vec{F_4} = -\vec{F_6}$]

916 Znázorněte vektor rychlosti přímočarého pohybu a) letadla, které uletí za 3 hodiny vzdálenost 510 kilometrů (10 km ve skutečnosti odpovídá 2 mm na obrázku); b) auta, které ujede přímý úsek dálnice dlouhý 3,5 kilometrů za 2 minuty (1 $\frac{km}{h}$ ve skutečnosti odpovídá 2 cm). Jaké jsou v jednotlivých případech rychlosti za hodinu?

[a) 170 $\frac{km}{h}$; b) 105 $\frac{km}{h}$]

917 Narýsujte vektor délky 3,5 cm, jehož směr svírá s kladným směrem osy x úhel velikosti a) 60°; b) 75°; c) 135°.

[Např. b)



d(OB) = 3,5 cm]

918 Znázorněte kvádr KLMN OPQR ($d(KL) = 4$ cm, $d(LM) = 2{,}5$ cm, $d(KO) = 5$ cm). a) Dokažte, že platí $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{OL}$ a $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{MK}$. b) Uvažujte jen vektory umístěné v hranách kvádru. Zjistěte, kolik různých volných vektorů tak celkem dostanete.

[a) Např. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{RQ}$ plyne z obdélníku KLQR; b) dostaneme 3 volné vektory a 3 k nim opačné.]

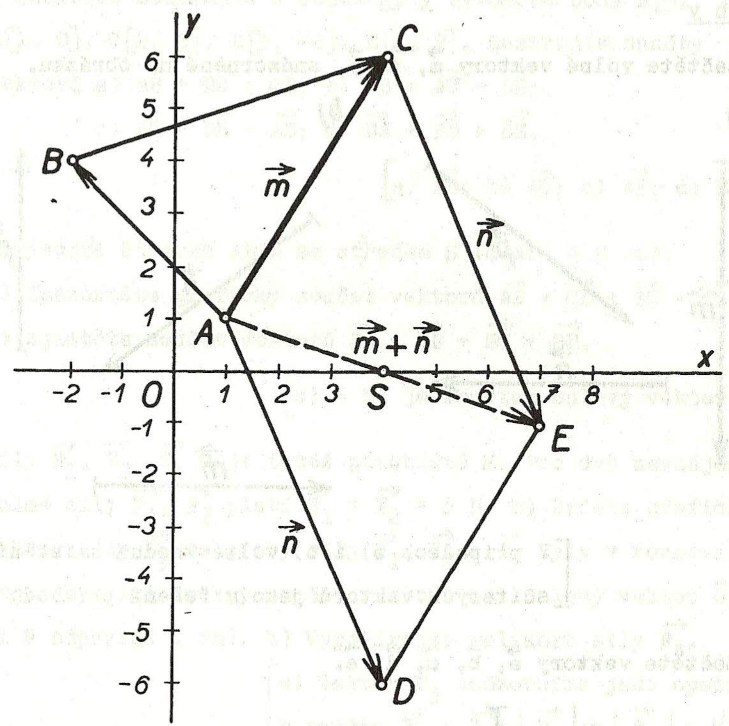
P Ř Í K L A D 84

V pravoúhlé soustavě souřadnic vyznačte body $A[1, 1]$, $B[-2, 4]$, $C[4, 6]$ a bod D souměrně sdružený s bodem C podle osy x. Pro bod E platí: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$. Sestrojte součet vektorů a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. c) Určete součet vektorů $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}$. Dovedete výsledek zobecnit? d) Stanovte souřadnice bodů D a E.

Řešení

a) Součet vektorů $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (viz obrázek na násl. straně), tj. vektoru s koncovým bodem, který splývá s počátkem druhého sčítaného vektoru, je vektor $\overrightarrow{AC}$ (na obr. označen též jako volný vektor $\vec{m}$).

b) Vektory $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{AD}$ můžeme graficky sečíst teprve tehdy, až zvolíme jejich vhodné umístění (tj. takové, že koncový bod prvního sčítance splývá s počátkem druhého jako v případě a)). Např. pro vektor $\overrightarrow{AD}$ zvolíme takové umístění $\overrightarrow{CE}$, že platí $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$, $d(AD) = d(CE)$ a oba vektory jsou souhlasné (čili patří témuž volnému vektoru $\vec{n}$). Vektor $\overrightarrow{AE} = \vec{m} + \vec{n}$ je pak hledaný součet.



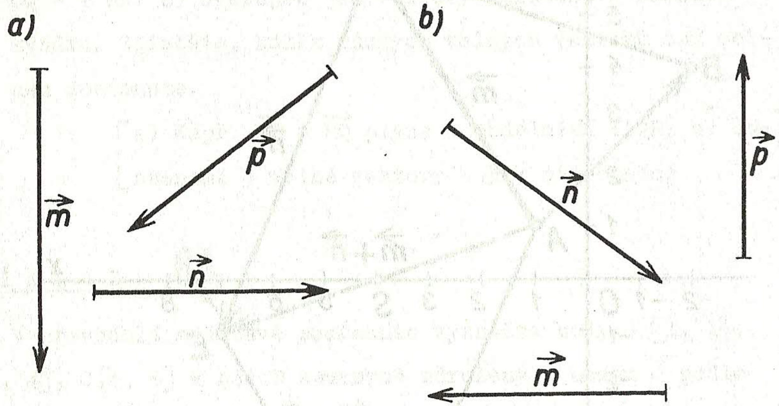
c) Sčítané vektory splňují volbu vhodného umístění pro jejich grafické sčítání. Výsledkem sčítání je nulový vektor, jehož počátečním i koncovým bodem je bod A, tj. $\overrightarrow{AA} = \vec{o}$. Sčítané vektory vytvoří v tomto případě uzavřenou lomenou čáru. To platí obecně, ať už počet sčítaných vektorů je jakýkoli.

d) Ze souměrnosti bodu D s bodem C podle osy x vyplývá, že $x_D = x_C$ a $y_D = -y_C$; je tedy $D[4, -6]$.

Protože ADEC je rovnoběžník, je středem úhlopříčky AE bod $S[4, 0]$; bod E má pak jako středově souměrně sdružený s bodem A souřadnice $[7, -1]$.

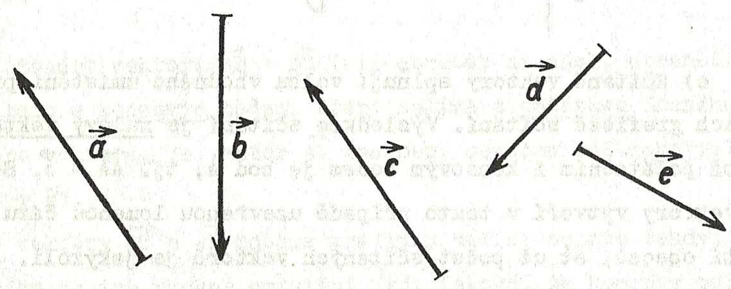
Úlohy

919 Sečtěte volné vektory $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, znázorněné na obrázku.



[V případech a) i b) volte vhodná umístění sčítaných vektorů jako v řešení příkladu 84.]

920 Sečtěte vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$.



[podle řešení příkladu 84]

921 Sestrojte výslednici sil $\vec{F}_1 = 3$ N, $\vec{F}_2 = 5$ N, $\vec{F}_3 = 7$ N. Síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ svírají úhel velikosti 30° a síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_3$ úhel velikosti 90°. (Volte např. 1 N $\hat{=}$ 1 cm.)

[Jsou dvě možnosti: velikost úhlu svíraného silami $\vec{F}_2$ a $\vec{F}_3$ je a) 60°; b) 120°.]

922 V soustavě souřadnic s osami x, y vyznačte body $A[-1, 2]$, $B[1, 0]$, $C[2, 3]$, $D[3, -2]$, $E[4, 2]$. Sestrojte součty vektorů a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE}$; d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE}$.

[a) $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{AE}$; d) $\overrightarrow{BE}$]

923 Narýsujte čtverec ABCD se středem S ($d(AB) = 8$ cm).
a) Znázorněte graficky součet vektorů $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.
b) Zjistěte součet vektorů $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$.

[a) i b) je součtem nulový vektor $\vec{o}$]

924 Síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ mají totéž působiště M. Pro dvě navzájem kolmé síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ platí $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 5$ N. b) Určete graficky vektor síly $\vec{F}_3$ tak, aby síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ a $\vec{F}_3$ byly v rovnováze (tj. aby jimi určený součet vektorů byl nulový vektor $\vec{o}$; 1 N odpovídá 1 cm). b) Vypočítejte velikost síly $\vec{F}_3$.

[a) Vektor $\vec{F}_3$ znázorníme jako opačný k součtu $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$; $|\vec{F}_3| = |\vec{F}_1| \cdot \sqrt{2}$.]

925 Obdélník ABCD o stranách délek $a = 6$ cm, $b = 4{,}5$ cm má střed S. Určete graficky součet vektorů a) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, b) $\overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA}$.

[a) $\overrightarrow{AS}$; b) $2\,\overrightarrow{AB}$; c) $\vec{o}$]

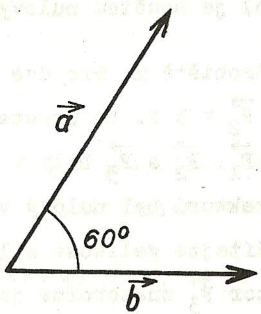
926 Sestrojte pravoúhlý trojúhelník MNO s pravým úhlem MNO, s odvěsnami délek $d(MN) = 3$ cm, $d(NO) = 4$ cm. Vypočítejte velikost vektoru $\vec{s}$ a graficky ho určete, je-li roven součtu a) $\frac{1}{3}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{4}\overrightarrow{NO}$; b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$; c) $\frac{2}{3}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$.

[a) $|\vec{s}| = \sqrt{2}$; b) $|\vec{s}| = 0$; c) $|\vec{s}| = 2\sqrt{2}$]

927 V trojúhelníku ABC je bod A_1 středem strany BC, bod B_1 je středem strany AC a bod C_1 je středem strany AB. Vypište všechny vektory, které jsou rovny vektoru a) $\overrightarrow{AC_1}$; b) $\overrightarrow{C_1A_1}$; c) $\overrightarrow{B_1C}$.

[a) např. $\overrightarrow{B_1A_1}$; b) např. $\overrightarrow{AB_1}$; c) tytéž vektory jako v b)]

928 Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ svírají úhel 60°. a) Sestrojte vektor $\vec{c}$ tak, aby součet $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ byl nulový vektor $\vec{o}$. b) Určete součet $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$, kde $\vec{c}$ je vektor z předchozí úlohy. Čemu se rovná tento součet?

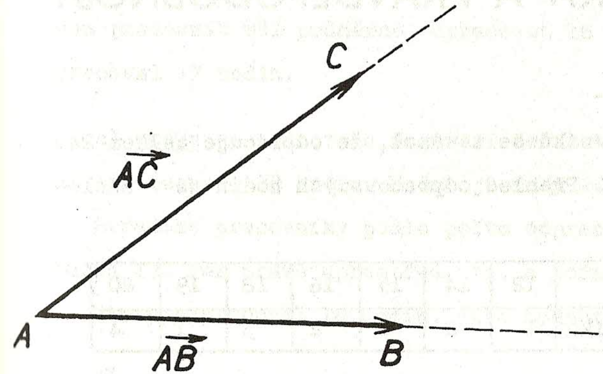


[a) $\vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b})$;
b) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b} = \vec{o}$]

929 Jsou dány body svými souřadnicemi v pravoúhlé soustavě souřadnic v rovině: A[1, 3], B[−1, 1], C[2, 1], D[−1, 0], E[2, −1], F[3, −1]. Označme $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Sestrojte body X, Y, Z a U tak, že pro ně platí a) $\overrightarrow{CX} = 1{,}5\,\vec{a}$; b) $\overrightarrow{DY} = -2\,\vec{a}$; c) $\overrightarrow{EZ} = 0{,}5\,\vec{a}$; d) $\overrightarrow{FU} = -\vec{a}$.

[a) X[−1, −2]; b) Y[3, 4]; c) Z[1, −2]; d) U[5, 1]]

930 Je dán pevný bod A a dva nenulové vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ (obr.). Vyšetřete množinu všech bodů X takových, že platí.
a) $\overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, kde k je libovolné reálné číslo (popř. $k \geqq 0$); b) $\overrightarrow{AX} = k_1 \cdot \overrightarrow{AB} + k_2 \cdot \overrightarrow{AC}$, kde $k_1 \geqq 0$, $k_2 \geqq 0$.



[a) Množinu bodů X tvoří všechny body přímky AB (popř. polopřímky AB). b) Body X jsou všechny body konvexního úhlu ∢ BAC.]