Řešené příklady z pravděpodobnosti:

1. **Honza se ze šedesáti maturitních otázek 10 nenaučil. Při zkoušce si losuje dvě otázky.**
   a. **Určete pravděpodobnost jevu A, že si vylosuje pouze otázky, které se naučil.**
   b. **Určete pravděpodobnost jevu B, že si vylosuje pouze otázky, které se nenaučil.**
   c. **Určete pravděpodobnost jevu C, že si vylosuje jednu otázku, kterou se naučil a druhou, kterou se nenaučil.**

<u>Řešení:</u>

Předpokládáme, že vytažení jednotlivých otázek je stejně pravděpodobné a pravděpodobnost jednotlivých jevů je rovna podílu: $\frac{počet\ příznivých\ výsledků\ daného\ jevu}{počet\ všech\ výsledků}$.

My nejprve určíme počet všech možných výsledků losování otázek. Honza losuje 2 otázky ze 60-ti (nezáleží na pořadí a otázky se nemohou opakovat): $K(2,60) = \binom{60}{2}$

a. Pravděpodobnost, že si vylosuje pouze otázky, které se naučil:

   Vybíráme 2 otázky z 50, které se naučil: $K(2,50) = \binom{50}{2}$

   $$P(A) = \frac{\binom{50}{2}}{\binom{60}{2}} = \frac{1225}{1770} \cong 0{,}692$$

   Pravděpodobnost, že si vylosuje dvě otázky, které se naučil, je 69,2 %.

b. Pravděpodobnost, že si vylosuje pouze otázky, které se nenaučil:

   Vybíráme 2 otázky z 10, které se naučil: $K(2,10) = \binom{10}{2}$

   $$P(B) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{60}{2}} = \frac{45}{1770} \cong 0{,}025$$

   Pravděpodobnost, že si vylosuje dvě otázky, které se nenaučil je 2,5 %.

c. pravděpodobnost, že si vylosuje jednu otázku, kterou se naučil a druhou, kterou se nenaučil:

   Vybíráme jednu otázku padesáti, kterou se naučil (50 možností) a jednu z deseti, kterou se nenaučil (z 10 možností). Celkem tedy máme $50 \cdot 10 = 500$ možností.

   $$P(C) = \frac{50 \cdot 10}{\binom{60}{2}} = \frac{500}{1770} \cong 0{,}282$$

   Pravděpodobnost, že si vylosuje jednu otázku, kterou se naučil a druhou, kterou se nenaučil je 28,2 %.

2. **Hodíme dvěma kostkami, četvenou a modrou. Jaká je pravděpodobnost, že**
   a. **na obou kostkách padne šestka (jev A),**
   b. **na obou kostkách padne liché číslo (jev B),**
   c. **alespoň na jedné padne liché číslo (jev C),**
   d. **bude součet bodů na kostkách 6 (jev D),**
   e. **bude součet bodů na kostkách větší než 4 (jev E)?**

Řešení:

Jako množinu všech možných výsledků si vybereme množinu všech uspořádaných dvojic čísel od jedné do šesti. Všech možných výsledků je $6 \cdot 6 = 36$.

a. Pravděpodobnost, že na obou kostkách padne šestka:
Příznivý výsledek je jediný, a to uspořádaná dvojice (6, 6).
$P(A) = \frac{1}{36}$

b. Pravděpodobnost, že na obou kostkách padne liché číslo:
Příznivé výsledky jsou uspořádané dvojice lichých čísel 1, 3, 5, jejich počet je $3 \cdot 3 = 9$
$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$
Vzhledem ke skutečnosti, že sudých a lichých čísel na kostkách je stejný počet, jsou všechny 4 možnosti – že padnou dvě lichá čísla, dvě sudá čísla, na první kostce sudé a na druhé liché a na první lichě a na druhé sudé číslo stejně pravděpodobné. Žádná jiná možnost nastat nemůže, proto pravděpodobnost každé z možností je 0,25.

c. Pravděpodobnost, že aspoň na jedné padne liché číslo:
Můžeme využít opačného jevu C´- na žádné z kostek nepadne liché číslo, tedy jinak řečeno na obou kostkách padne sudé číslo, který má stejně jako jev B pravděpodobnost 0,25
$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

d. Pravděpodobnost, že součet bodů na kostkách bude 6:
Příznivé výsledky jsou uspořádané dvojice (1;5), (5;1), (2;4), (4;2), (3;3),
$$P(D) = \frac{5}{36} \cong 0{,}139$$

e. Pravděpodobnost, že součet bodů na kostkách bude větší než 4.
Opět využijeme jev opačný E´- součet bodů na kostkách bude menší nebo roven čtyřem. Příznivé možnosti pak jsou uspořádané dvojice (1;1), (1;2), (1,3), (2;1), (2;2), (3,1)
$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

3. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi jsou aspoň tři dívky, jestliže pravděpodobnost narození chlapce je 0,51?

Řešení:

Využijeme Bernoulliho schéma: Máme-li n nezávislých pokusů, z nichž každý skončí buď zdarem s pravděpodobností p, nebo nezdarem s pravděpodobností q. Potom pravděpodobnost jevu A_k, že právě k pokusů bude zdařilých, je $P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Určujeme pravděpodobnost jevu A, že v rodině se čtyřmi dětmi jsou aspoň tři dívky, tedy tři dívky (jev A_3), nebo čtyři dívky (jev A_4). Vzhledem ke skutečnosti, že tyto dvě možnosti se navzájem vylučují výsledná pravděpodobnost bude součtem pravděpodobností $P(A_3)$ a $P(A_4)$.

Pravděpodobnost, že v rodině se 4 dětmi budou 3 dívky:
$$P(A_3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}49^3 \cdot 0{,}51^1 \cong 0{,}2400$$
Pravděpodobnost, že v rodině se 4 dětmi budou 4 dívky:
$$P(A_4) = \binom{4}{4} \cdot 0{,}49^4 \cdot 0{,}51^0 = 0{,}49^4 \cong 0{,}0576$$
Pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi jsou aspoň tři dívky:
$$P(A) = P(A_3) + P(A_4) \cong 0{,}2977$$

4. **Student dostal test, který obsahuje deset otázek. Ke každé otázce vybírá právě jednu odpověď z možností a, b, c, d. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví aspoň 70 % otázek správně, volí-li odpovědi zcela náhodně?**

Řešení:

Zjišťujeme pravděpodobnost, že zodpoví aspoň na 70 % otázek z deseti, tedy aspoň na sedm. Půjde o součet pravděpodobností, že odpoví na 7, 8, 9, 10 otázek správně (opět se jednotlivé možnosti vzájemně vylučují).

Opět použijeme Bernoulliho schéma:

$$P(A_7) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$P(A_8) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(A_9) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1$$

$$P(A_{10}) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$P(A) = P(A_7) + P(A_8) + P(A_9) + P(A_{10}) \cong 0{,}0035$$

5. **Žárovka svítí se spolehlivostí 85 % (tzn. Po určité době svítí jen 85 % žárovek). Jaká je spolehlivost systému (alespoň část svítí) v procentech, jsou-li zapojeny**
   a. **dvě žárovky sériově,**
   b. **dvě žárovky paralelně,**
   c. **dvě žárovky sériově a třetí k nim paralelně?**

Řešení:

a. U sériového zapojení musí části pracovat nezávisle na sobě a porucha libovolné části způsobí poruchu celého zařízení. Systém tedy bude fungovat pouze v případě, že budou svítit obě žárovky (určujeme pravděpodobnost průniku obou jevů). Vzhledem ke skutečnosti, že funkčnost jedné žárovky nezávisí na funkčnosti druhé a naopak, jde o nezávislé jevy a spolehlivost systému (pravděpodobnost, s jakou systém funguje) vypočítáme se bude rovnat součinu pravděpodobností jednotlivých jevů:
$$P(\check{Z}_1 \cap \check{Z}_2) = 0{,}85 \cdot 0{,}85 = 0{,}7225 = 72{,}25\ \%$$

b. Sériové zapojení musí funkční části pracovat nezávisle na sobě, stačí pokud funguje alespoň jedna (určujeme tedy sjednocení obou jevů)
$$P(\check{Z}_1 \cup \check{Z}_2) = P(\check{Z}_1) + P(\check{Z}_2) - P(\check{Z}_1 \cap \check{Z}_2) = 0{,}85 + 0{,}85 - 0{,}85 \cdot 0{,}85 = 0{,}9775$$
$$P(\check{Z}_1 \cup \check{Z}_2) = 97{,}75\ \%$$

c. Dvě sériově a třetí k nim paralelně:
$$P[(\check{Z}_1 \cap \check{Z}_2) \cup \check{Z}_3] = P(\check{Z}_1) \cdot P(\check{Z}_2) + P(\check{Z}_3) - P(\check{Z}_1) \cdot P(\check{Z}_2) \cdot P(\check{Z}_3) == 0{,}85^2 + 0{,}85 - 0{,}85^3$$
$$= 0{,}9583 = 95{,}83\%$$

6. **Dva střelci střílejí nezávisle na sobě na cíl. První střelec zasáhne síl s pravděpodobností 0,7, druhý s pravděpodobností 0,9. Každý vystřelí právě jednu ránu. Jaká je pravděpodobnost, že:**
   a. **oba dva zasáhli cíl (jev A),**
   b. **právě jeden zasáhl cíl (jev B),**
   c. **ani jeden z nich nezasáhl cíl (jev C)?**

Řešení:

Označíme jevy: P- první zasáhne cíl,

D- druhý střelec zasáhne cíl

a. Hledáme pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů:
$P(A) = P(P \cap D) = P(P) \cdot P(D) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$

b. Pravděpodobnost jevu B bude součtem pravděpodobností průniku jevu P a jevu opačného k jevu D a průniku jevu opačného k jevu P a jevu D. Platí přitom, že $P(P') = 1 - P(P) = 0{,}3$ a $P(D') = 1 - P(D) = 0{,}1$

$P(B) = P(P) \cdot P(D') + P(P') \cdot P(D) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}34$

c. Pravděpodobnost, že ani jeden nezasáhne cíl je pravděpodobností průniku opačných jevů k jevům P a D:
$P(C) = P(P' \cap D') = P(P') \cdot P(D') = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$

2. zůsob řešení: Neexistuje jiná možnost, než že se trefí oba, trefí jen jeden, nebo netrepfí žádný. Proto je součet pravděpodobností jevů A, B, C je roven jedné. Proto jev C lze vypočítat jako rozdíl $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0{,}63 - 0{,}34 = 0{,}03$

Příklady k procvičování:

1. Náhodně vybereme čtyřciferné číslo. Jaká jepravděpodobnost, že se v jeho zápisu vyskytuje cifra 8
   a. právě jednou,
   b. aspoň jednou?

[a. 0,297; b. 0,352]

2. V zásilce 50 počítačů je 6 nekvalitních. Když se z nich 10 náhodně vybere a pošle do prodeje, jaká je pravděpodobnost, že jsou mezi nimi nejvýše 2 nekvalitní?

[0,9144]

3. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami:
   a. Součet bodů na kostkách bude 9?
   b. Součet bodů na kostkách bude lichý?
   c. Součet bodů na kostkách bude dělitelný pěti?

[a. 0,111; b. 0,5; c. 0,194]

4. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je aspoň jeden chlapec, jestliže pravděpodobnost narození chlapce je 0,51?

[0,9424]

5. Žárovka svítí se spolehlivostí 92 %. Jaká je spolehlivost zařízení, ve kterém jsou tři žárovky zapojeny sériově?

[0,779]

6. Student píše test, který obsahuje deset otázek. Ke každé vybírá ze tří možností právě jednu odpověď. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví správně, volí-li otázky zcela náhodně?

[0,137]

7. Dělník obsluhuje tři stroje. Pravděpodobnost, že během jedné hodiny nebude třeba jeho zásahu, je u prvního stoje 0,9, u druhého 0,8 a u třetího 0,75. Určete pravděpodobnost, že během jedné hodiny bude třeba dělníkova zásahu
   a. aspoň u jednoho stroje,
   b. nejvýše u jednoho stroje.

[a. 0,46; b. 0,915]