Pravděpodobnost - řešené příklady:

1. Honza se ze šedesáti maturitních otázek 10 nenaučil. Při zkoušce si losuje dvě otázky.
   a. Určete pravděpodobnost jevu A, že si vylosuje pouze otázky, které se naučil.
   b. Určete pravděpodobnost jevu B, že si vylosuje pouze otázky, které se nenaučil.
   c. Určete pravděpodobnost jevu C, že si vylosuje jednu otázku, kterou se naučil a druhou, kterou se nenaučil.

Řešení:

Předpokládáme, že vytažení jednotlivých otázek je stejně pravděpodobné a pravděpodobnost jednotlivých jevů je rovna podílu: $\frac{počet\ příznivých\ výsledků\ daného\ jevu}{počet\ všech\ výsledků}$.

My nejprve určíme počet všech možných výsledků losování otázek. Honza losuje 2 otázky ze 60-ti (nezáleží na pořadí a otázky se nemohou opakovat): $K(2,60) = \binom{60}{2}$

a. Pravděpodobnost, že si vylosuje pouze otázky, které se naučil:
   Vybíráme 2 otázky z 50, které se naučil: $K(2,50) = \binom{50}{2}$
   $$P(A) = \frac{\binom{50}{2}}{\binom{60}{2}} = \frac{1225}{1770} \cong 0{,}692$$
   Pravděpodobnost, že si vylosuje dvě otázky, které se naučil, je 69,2 %.

b. Pravděpodobnost, že si vylosuje pouze otázky, které se nenaučil:
   Vybíráme 2 otázky z 10, které se naučil: $K(2,10) = \binom{10}{2}$
   $$P(B) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{60}{2}} = \frac{45}{1770} \cong 0{,}025$$
   Pravděpodobnost, že si vylosuje dvě otázky, které se nenaučil je 2,5 %.

c. pravděpodobnost, že si vylosuje jednu otázku, kterou se naučil a druhou, kterou se nenaučil:
   Vybíráme jednu otázku padesáti, kterou se naučil (50 možností) a jednu z deseti, kterou se nenaučil (z 10 možností). Celkem tedy máme $50 \cdot 10 = 500$ možností.
   $$P(C) = \frac{50 \cdot 10}{\binom{60}{2}} = \frac{500}{1770} \cong 0{,}282$$
   Pravděpodobnost, že si vylosuje jednu otázku, kterou se naučil a druhou, kterou se nenaučil je 28,2 %.

2. Hodíme dvěma kostkami, četvenou a modrou. Jaká je pravděpodobnost, že
   a. na obou kostkách padne šestka (jev A),
   b. na obou kostkách padne liché číslo (jev B),
   c. alespoň na jedné padne liché číslo (jev C),

d. bude součet bodů na kostkách 6 (jev D),
e. bude součet bodů na kostkách větší než 4 (jev E)?

Řešení:

Jako množinu všech možných výsledků si vybereme množinu všech uspořádaných dvojic čísel od jedné do šesti. Všech možných výsledků je $6 \cdot 6 = 36$.

a. Pravděpodobnost, že na obou kostkách padne šestka:
Příznivý výsledek je jediný, a to uspořádaná dvojice (6, 6).
$P(A) = \frac{1}{36}$

b. Pravděpodobnost, že na obou kostkách padne liché číslo:
Příznivé výsledky jsou uspořádané dvojice lichých čísel 1, 3, 5, jejich počet je $3 \cdot 3 = 9$
$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
Vzhledem ke skutečnosti, že sudých a lichých čísel na kostkách je stejný počet, jsou všechny 4 možnosti – že padnou dvě lichá čísla, dvě sudá čísla, na první kostce sudé a na druhé liché a na první lichě a na druhé sudé číslo stejně pravděpodobné. Žádná jiná možnost nastat nemůže, proto pravděpodobnost každé z možností je 0,25.

c. Pravděpodobnost, že aspoň na jedné padne liché číslo:
Můžeme využít opačného jevu C´- na žádné z kostek nepadne liché číslo, tedy jinak řečeno na obou kostkách padne sudé číslo, který má stejně jako jev B pravděpodobnost 0,25
$P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

d. Pravděpodobnost, že součet bodů na kostkách bude 6:
Příznivé výsledky jsou uspořádané dvojice (1;5), (5;1), (2;4), (4;2), (3;3),
$P(D) = \frac{5}{36} \cong 0{,}139$

e. Pravděpodobnost, že součet bodů na kostkách bude větší než 4.
Opět využijeme jev opačný E´- součet bodů na kostkách bude menší nebo roven čtyřem. Příznivé možnosti pak jsou uspořádané dvojice (1;1), (1;2), (1,3), (2;1), (2;2), (3,1)
$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

3. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi jsou aspoň tři dívky, jestliže pravděpodobnost narození chlapce je 0,51?

Řešení:

Využijeme Bernoulliho schéma: Máme-li n nezávislých pokusů, z nichž každý skončí buď zdarem s pravděpodobností p, nebo nezdarem s pravděpodobností q. Potom pravděpodobnost jevu A_k, že právě k pokusů bude zdařilých, je $P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Určujeme pravděpodobnost jevu A, že v rodině se čtyřmi dětmi jsou aspoň tři dívky, tedy tři dívky (jev A_3), nebo čtyři dívky (jev A_4). Vzhledem ke skutečnosti, že tyto dvě možnosti se navzájem vylučují výsledná pravděpodobnost bude součtem pravděpodobností $P(A_3)$ a $P(A_4)$.

Pravděpodobnost, že v rodině se 4 dětmi budou 3 dívky:

$$P(A_3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}49^3 \cdot 0{,}51^1 \cong 0{,}2400$$

Pravděpodobnost, že v rodině se 4 dětmi budou 4 dívky:

$$P(A_4) = \binom{4}{4} \cdot 0{,}49^4 \cdot 0{,}51^0 = 0{,}49^4 \cong 0{,}0576$$

Pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi jsou aspoň tři dívky:

$$P(A) = P(A_3) + P(A_4) \cong 0{,}2977$$

4. Student dostal test, který obsahuje deset otázek. Ke každé otázce vybírá právě jednu odpověď z možností a, b, c, d. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví aspoň 70 % otázek správně, volí-li odpovědi zcela náhodně?

   Řešení:

   Zjišťujeme pravděpodobnost, že zodpoví aspoň na 70 % otázek z deseti, tedy aspoň na sedm. Půjde o součet pravděpodobností, že odpoví na 7, 8, 9, 10 otázek správně (opět se jednotlivé možnosti vzájemně vylučují).

   Opět použijeme Bernoulliho schéma:

$$P(A_7) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$P(A_8) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(A_9) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1$$

$$P(A_{10}) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$P(A) = P(A_7) + P(A_8) + P(A_9) + P(A_{10}) \cong 0{,}0035$$

5. Žárovka svítí se spolehlivostí 85 % (tzn. Po určité době svítí jen 85 % žárovek). Jaká je spolehlivost systému (alespoň část svítí) v procentech, jsou-li zapojeny
   a. dvě žárovky sériově,
   b. dvě žárovky paralelně,
   c. dvě žárovky sériově a třetí k nim paralelně?

   Řešení:

   a. U sériového zapojení musí části pracovat nezávisle na sobě a porucha libovolné části způsobí poruchu celého zařízení. Systém tedy bude fungovat pouze v případě, že budou svítit obě žárovky (určujeme pravděpodobnost průniku obou jevů). Vzhledem ke skutečnosti, že funkčnost jedné žárovky nezávisí na funkčnosti druhé a naopak, jde o nezávislé jevy a spolehlivost systému (pravděpodobnost, s jakou systém funguje) vypočítáme se bude rovnat součinu pravděpodobností jednotlivých jevů:

$P(\check{Z}_1 \cap \check{Z}_2) = 0{,}85 \cdot 0{,}85 = 0{,}7225 = 72{,}25\ \%$

b. Sériové zapojení musí funkční části pracovat nezávisle na sobě, stačí pokud funguje alespoň jedna (určujeme tedy sjednocení obou jevů)

$$P(\check{Z}_1 \cup \check{Z}_2) = P(\check{Z}_1) + P(\check{Z}_2) - P(\check{Z}_1 \cap \check{Z}_2) = 0{,}85 + 0{,}85 - 0{,}85 \cdot 0{,}85 = 0{,}9775$$

$P(\check{Z}_1 \cup \check{Z}_2) = 97{,}75\ \%$

c. Dvě sériově a třetí k nim paralelně:

$$P[(\check{Z}_1 \cap \check{Z}_2) \cup \check{Z}_3] = P(\check{Z}_1) \cdot P(\check{Z}_2) + P(\check{Z}_3) - P(\check{Z}_1) \cdot P(\check{Z}_2) \cdot P(\check{Z}_3) == 0{,}85^2 + 0{,}85 - 0{,}85^3$$
$$= 0{,}9583 = 95{,}83\%$$

6. Dva střelci střílejí nezávisle na sobě na cíl. První střelec zasáhne síl s pravděpodobností 0,7, druhý s pravděpodobností 0,9. Každý vystřelí právě jednu ránu. Jaká je pravděpodobnost, že:
   a. oba dva zasáhli cíl (jev A),
   b. právě jeden zasáhl cíl (jev B),
   c. ani jeden z nich nezasáhl cíl (jev C)?

Řešení:

Označíme jevy: P- první zasáhne cíl,
D- druhý střelec zasáhne cíl

a. Hledáme pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů:
$P(A) = P(P \cap D) = P(P) \cdot P(D) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$

b. Pravděpodobnost jevu B bude součtem pravděpodobností průniku jevu P a jevu opačného k jevu D a průniku jevu opačného k jevu P a jevu D. Platí přitom, že $P(P') = 1 - P(P) = 0{,}3$ a $P(D') = 1 - P(D) = 0{,}1$

$P(B) = P(P) \cdot P(D') + P(P') \cdot P(D) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}34$

c. Pravděpodobnost, že ani jeden nezasáhne cíl je pravděpodobností průniku opačných jevů k jevům P a D:
$P(C) = P(P' \cap D') = P(P') \cdot P(D') = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$

2. zůsob řešení: Neexistuje jiná možnost, než že se trefí oba, trefí jen jeden, nebo netrepfí žádný. Proto je součet pravděpodobností jevů A, B, C je roven jedné. Proto jev C lze vypočítat jako rozdíl $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0{,}63 - 0{,}34 = 0{,}03$

Příklady k procvičování:

1. Náhodně vybereme čtyřciferné číslo. Jaká jepravděpodobnost, že se v jeho zápisu vyskytuje cifra 8
   a. právě jednou,
   b. aspoň jednou?

[a. 0,297; b. 0,352]

2. V zásilce 50 počítačů je 6 nekvalitních. Když se z nich 10 náhodně vybere a pošle do prodeje, jaká je pravděpodobnost, že jsou mezi nimi nejvýše 2 nekvalitní?

[0,9144]

3. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami:
   a. Součet bodů na kostkách bude 9?
   b. Součet bodů na kostkách bude lichý?
   c. Součet bodů na kostkách bude dělitelný pěti?

[a. 0,111; b. 0,5; c. 0,194]

4. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi je aspoň jeden chlapec, jestliže pravděpodobnost narození chlapce je 0,51?

[0,9424]

5. Žárovka svítí se spolehlivostí 92 %. Jaká je spolehlivost zařízení, ve kterém jsou tři žárovky zapojeny sériově?

[0,779]

6. Student píše test, který obsahuje deset otázek. Ke každé vybírá ze tří možností právě jednu odpověď. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví správně, volí-li otázky zcela náhodně?

[0,137]

7. Dělník obsluhuje tři stroje. Pravděpodobnost, že během jedné hodiny nebude třeba jeho zásahu, je u prvního stoje 0,9, u druhého 0,8 a u třetího 0,75. Určete pravděpodobnost, že během jedné hodiny bude třeba dělníkova zásahu
   a. aspoň u jednoho stroje,
   b. nejvýše u jednoho stroje.

[a. 0,46; b. 0,915]